លំហាត់គណិតវិទ្យា

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

និង

អនុគមន៍លោការីត

សុខ ពិសិដ្ឋ - Sok Piseth Page
Facebook.com/TeacherSokPiseth
pisethsok.wordpress.com
plus.google.com/+PisethSok_SPS

Chapitre 3

La fonction exponentielle

I. *Calculs*

✓ *Somme, produit, différence et quotient*

Exercice 1.

Simplifier les expressions suivantes : $A=e^{5}+7e^{-5}-3e^{5}-9e^{-5}$, $B=\dfrac{7e^{5}\times\left(3e^{3}\right)^{2}}{21e^{-5}}$, $C=\left(2e^{3}+e^{-3}\right)^{2}$, $D=\sqrt{\left(e^{2}\right)^{3}}$.

Solution

- $A=e^{5}+7e^{-5}-3e^{5}-9e^{-5}=-2e^{5}-2e^{-5}=\boxed{-2\left(e^{5}+e^{-5}\right)}$.
- $B=\dfrac{7e^{5}\times\left(3e^{3}\right)^{2}}{21e^{-5}}=\dfrac{7e^{5}\times 9e^{6}}{21e^{-5}}=\dfrac{7\times 9}{21}e^{5}\times e^{6}\times e^{5}=\boxed{3e^{16}}$.
- $C=\left(2e^{3}+e^{-3}\right)^{2}=4\left(e^{3}\right)^{2}+4e^{3}\times e^{-3}+\left(e^{-3}\right)^{2}=\boxed{4e^{6}+4+e^{-6}}$.
- $D=\sqrt{\left(e^{2}\right)^{3}}=\sqrt{e^{6}}=\boxed{e^{3}}$.

Exercice 2.

Soit x appartenant à $\mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes :
$A=\left(e^{2}-3e^{5}\right)^{2}$, $B=\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^{2}-\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)^{2}$.

Solution

$A = (e^2 - 3e^5)^2 = (e^2)^2 - 6e^2 \times e^5 + 9(e^5)^2 = \boxed{e^4 - 6e^7 + 9e^{10}}$.

$B = (e^{2x} + e^{-2x})^2 - (e^{2x} - e^{-2x})^2 = e^{4x} + e^{-4x} + 2 - (e^{4x} + e^{-4x} - 2) = \boxed{4}$.

Exercice 3.

Simplifier $A = e^{108} + e^{109} + e^{110} + \dots + e^{133}$.

Solution

La suite $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison e.

$A = e^{108} + e^{109} + e^{110} + \dots + e^{133} = e^{108}(1 + e + \dots + e^{25})$. Comme $e \neq 1$, on a $A = e^{108} \times \dfrac{1 - e^{26}}{1 - e} = \boxed{\dfrac{e^{108} - e^{134}}{1 - e}}$.

Exercice 4.

Démontrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Solution

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \boxed{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}$. $e^x \neq 0$

✓ *Résoudre une équation*

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$e^{-x} - e^x = 0, \; e^{-x} + e^x = 0.$$

Solution

- $e^{-x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$.
- e^x et e^{-x} sont strictement positifs d'où $e^{-x} + e^x > 0$ donc l'équation $e^{-x} + e^x = 0$ n'a pas de solution.

Exercice 6.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - (1 + e)e^x + e = 0$ (poser $X = e^x$).

Solution

On pose $X = e^x$. L'équation devient $X^2 - (1 + e)X + e = 0$.
$\Delta = (1 + e)^2 - 4e = 1 - 2e + e^2 = (1 - e)^2$. $\sqrt{\Delta} = e - 1$ car $e > 1$.

$X_1 = \dfrac{1+e+e-1}{2} = \dfrac{2e}{2} = e > 0$.

$X_2 = \dfrac{1+e-(e-1)}{2} = \dfrac{1+e-e+1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 > 0$.

$e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0 \Leftrightarrow (e^x = e \text{ ou } e^x = 1) \Leftrightarrow \boxed{x = 1 \text{ ou } x = 0}$.

Exercice 7.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis donner une valeur approchée à 10^{-5} près par excès des solutions éventuelles des équations :

$$e^x = 5,\ 7 - 3e^x = -8e^x,\ -2e^x + 19 = 5e^x.$$

Solution

- $(e^x = 5) \Leftrightarrow (\ln(e^x) = \ln(5)) \Leftrightarrow \boxed{x = \ln 5}$.

donc $x = 1.60944$ à 10^{-5} près par excès.

- $(7 - 3e^x = -8e^x) \Leftrightarrow \left(5e^x = -7 \Leftrightarrow e^x = -\dfrac{7}{5}\right)$.

Cette équation n'a pas de solution car pour tout réel x on a $e^x > 0$.

- $(-2e^x + 19 = 5e^x) \Leftrightarrow (7e^x = 19) \Leftrightarrow \left(e^x = \dfrac{19}{7}\right)$.

$(-2e^x + 19 = 5e^x) \Leftrightarrow \left(\ln(e^x) = \ln\left(\dfrac{19}{7}\right)\right) \Leftrightarrow \boxed{x = \ln\left(\dfrac{19}{7}\right)}$.

$x = 0.99853$ à 10^{-5} près par excès.

Exercice 8.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis donner une valeur approchée à 10^{-4} près par défaut des solutions des équations :

$$\frac{3e^x - 1}{9 + e^x} = 2,\ \frac{3e^x + 1}{5e^x + 2} = \frac{e^x - 37}{2e^x - 64}.$$

Solution

- $\left(\dfrac{3e^x - 1}{9 + e^x} = 2\right) \Leftrightarrow (3e^x - 1 = 2(9 + e^x)) \Leftrightarrow (e^x = 19) \Leftrightarrow \boxed{x = \ln(19)}$

donc $x = 2.9444$ à 10^{-4} près par défaut.

- On pose $X = e^x$ l'équation $\dfrac{3e^x + 1}{5e^x + 2} = \dfrac{e^x - 37}{2e^x - 64}$ s'écrit alors

$$\frac{3X + 1}{5X + 2} = \frac{X - 37}{2X - 64}.$$

L'ensemble de définition de cette dernière équation est $\mathbb{R}-\left\{-\frac{2}{5},32\right\}$.

$$\left(\frac{3X+1}{5X+2}=\frac{X-37}{2X-64}\right)\Leftrightarrow\left((3X+1)(2X-64)=(5X+2)(X-27)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(6X^2-190X-64=5X^2-183X-74\right)\Leftrightarrow\left(X^2-7X+10=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left((X-2)(X-5)=0\right)\Leftrightarrow(X=2\text{ ou }X=5).$$

2 et 5 sont dans l'ensemble de définition $\mathbb{R}-\left\{-\frac{2}{5};32\right\}$ donc 2 et 5 sont solutions de $\frac{3X+1}{5X+2}=\frac{X-37}{2X-64}$. Comme $X=e^x$ on a :

$$\left(\frac{3e^x+1}{5e^x+2}=\frac{e^x-37}{2e^x-64}\right)\Leftrightarrow\left(e^x=2\text{ ou }e^x=5\right)\Leftrightarrow\boxed{x=\ln(2)\text{ ou }x=\ln(5)}.$$

$x=0.6931$ à 10^{-4} près par défaut ou $x=1.6094$ à 10^{-4} près par défaut.

Exercice 9.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis donner une valeur approchée à 10^{-4} près par excès des solutions des équations :

$$e^{-x}-5=19,\ \frac{2e^{-x}-5}{3}=\frac{3e^{-x}+2}{5}$$

Solution

- $$\left(e^{-x}-5=19\right)\Leftrightarrow\left(e^{-x}=24\right)\Leftrightarrow\left(e^x=\frac{1}{24}\right)\Leftrightarrow\left(x=\ln\left(\frac{1}{24}\right)\right).$$

$\boxed{x=-\ln(24)}$ et $x=-3.1780$ à 10^{-4} près par excès.

- $$\left(\frac{2e^{-x}-5}{3}=\frac{3e^{-x}+2}{5}\right)\Leftrightarrow\left(5\left(2e^{-x}-5\right)=3\left(3e^{-x}+2\right)\right)$$

$$\left(10e^{-x}-25=9e^{-x}+6\right)\Leftrightarrow\left(e^{-x}=31\right)\Leftrightarrow\left(-x=\ln(31)\right)$$

$\boxed{x=-\ln(31)}$ et $x=-3.4339$ à 10^{-4} près par excès.

Exercice 10.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis donner une valeur approchée à 10^{-4} près par défaut des solutions des équations :

$$e^{2x-1}=5,\ 3e^{7-3x}+19=5e^{7-3x}.$$

Solution

- $$\left(e^{2x-1}=5\right)\Leftrightarrow\left(\ln\left(e^{2x-1}\right)=\ln(5)\right)\Leftrightarrow(2x-1=\ln(5))$$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{1+\ln(5)}{2}}$. $x = 1.3047$ à 10^{-4} près par défaut.

- $\left(3e^{7-3x} + 19 = 5e^{7-3x}\right) \Leftrightarrow \left(e^{7-3x} = \dfrac{19}{2}\right) \Leftrightarrow 7 - 3x = \ln\left(\dfrac{19}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{1}{3}\left(7 - \ln\left(\dfrac{19}{2}\right)\right)}$ donc $x = 1.5829$ à 10^{-4} près par défaut.

Exercice 11.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} + 3e^{x} - 5 = 0$ puis donner une approximation des solutions à 10^{-3} par défaut.

Solution

On pose $X = e^x$. L'équation s'écrit alors $X^2 + 3X - 5 = 0$ (1).
Le discriminant est : $\Delta = 9 + 20 = 29$. Les solutions de l'équation (1) sont donc $X_1 = \dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}$. Comme $X > 0$ on ne doit conserver que les solutions strictement positives. On résout donc $e^x = \dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}$ ce qui donne $\boxed{x = \ln\left(\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)}$ et $x = 0.176$ à 10^{-3} près par défaut.

Exercice 12.*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x+2} + \dfrac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$.

Solution

On pose $X = e^{3x+2}$ donc $X > 0$. L'équation $e^{3x+2} + \dfrac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$ s'écrit : $X + \dfrac{e}{X} = 1 + e$. $\left(X + \dfrac{e}{X} = 1 + e\right) \Leftrightarrow \left(X^2 - (1+e)X + e = 0\right)$.

$\Delta = (1+e)^2 - 4e = (1-e)^2 > 0$. $X_1 = \dfrac{1+e+\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{1+e+e-1}{2} = e$.

$X_2 = \dfrac{1+e-\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{1+e-e+1}{2} = 1$.

Ces deux solutions sont strictement positives donc :

$\left(e^{3x+2} + \dfrac{e}{e^{3x+2}} = e + 1\right) \Leftrightarrow \left(e^{3x+2} = e \text{ ou } e^{3x+2} = 1\right)$.

$$\left(e^{3x+2}+\frac{e}{e^{3x+2}}=e+1\right)\Leftrightarrow(3x+2=1 \text{ ou } 3x+2=0).$$

$$\left(e^{3x+2}+\frac{e}{e^{3x+2}}=e+1\right)\Leftrightarrow\left(\boxed{x=-\frac{1}{3} \text{ ou } x=-\frac{2}{3}}\right).$$

Exercice 13.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x}+6e^{-x}=5$.

Solution

$$\left(e^{x}+6e^{-x}=5\right)\Leftrightarrow\left(e^{x}\left(e^{x}+6e^{-x}\right)=5e^{x}\right)\Leftrightarrow\left(e^{2x}-5e^{x}+6=0\right).$$

Si on pose $X=e^{x}$ cette dernière équation s'écrit :

$$\left(X^2-5X+6=0\right)\Leftrightarrow\left((X-2)(X-3)=0\right)\Leftrightarrow(X=2 \text{ ou } X=3).$$

Ces deux solutions étant strictement positives. On a :

$$\left(e^{x}+6e^{-x}=5\right)\Leftrightarrow\left(e^{x}=2 \text{ ou } e^{x}=3\right)\Leftrightarrow\left(\boxed{x=\ln(2)} \text{ ou } \boxed{x=\ln(3)}\right).$$

Exercice 14. **

Déterminer suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation : $e^{2x}+4me^{x}-2m+2=0$ (1)

Solution

On pose $X=e^{x}$ donc l'équation (1) s'écrit $X^2+4mX-2m+2=0$ (2)

$$\Delta=(4m)^2-4(2-2m)=8\left(2m^2+m-1\right)=8(m+1)(2m-1).$$

Étude du signe de Δ.

m	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Δ est un trinôme du second degré possédant deux racines réelles -1 et $\frac{1}{2}$ donc il est positif (du signe de 16) à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur des racines. *Attention* : comme $X=e^{x}$ les solutions négatives de (2) ne donnent pas des solutions de (1).

- Si $m\in\left]-1;\frac{1}{2}\right[$ alors Δ est strictement négatif donc (2) n'a pas de solution réelle et l'équation (1) n'a pas de solution.
- On pose $E=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ si $m\in E$ alors $\Delta>0$ et l'équation (2) possède deux solutions réelles distinctes X_1 et X_2.

On a $X_1X_2 = 2-2m$ (produit des racines) et $X_1 + X_2 = -4m$ (somme des racines).

— Si le produit des racines est strictement négatif, c'est-à-dire si $m > 1$ $(2-2m < 0)$ il y a une solution de (2) qui est strictement positive l'autre étant strictement négative, donc il y a une seule solution de (1).

— Si le produit des racines est strictement positif $(m < 1)$ alors les deux racines ont le même signe, celui de leur somme $(-4m)$. Donc si $m < 0$ et $m \in E$ c'est-à-dire si $m \in \left]-\infty\,;-1\right[$ alors l'équation (2) admet deux solutions strictement positives et l'équation (1) possède deux solutions.

— Si $m \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$ alors les deux racines de l'équation (2) sont strictement négatives (leur produit est strictement positif et leur somme est strictement négative) donc (1) ne possède pas de solution.

- Étude du nombre de solutions pour $m = -1$, $m = \frac{1}{2}$ et $m = 1$.

— Si $m = -1$ alors $\Delta = 0$ donc (2) admet une racine double $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ c'est-à-dire $-2m = 2$ et donc l'équation (1) possède une seule solution.

— Si $m = \frac{1}{2}$ alors $\Delta = 0$. La racine double vaut $-2m = -1$ et donc (1) n'a pas de solution.

— Si $m = 1$ alors $\Delta > 0$ et on a $X_1X_2 = 0$ et $X_1 + X_2 = -4$ donc $X_1 = 0$ et $X_2 = -4$. (1) ne possède pas de solution. En résumé :

— Si $m \in \left]-\infty\,;-1\right[$ alors l'équation $e^{2x} + 4me^{x} - 2m + 2 = 0$ possède deux solutions.

— Si $m \in \left]-1\,;1\right]$ alors l'équation $e^{2x} + 4me^{x} - 2m + 2 = 0$ ne possède pas de solution.

— Si $m \in \left]1\,;+\infty\right[$ alors l'équation $e^{2x} + 4me^{x} - 2m + 2 = 0$ possède une solution.

— Si $m = -1$ alors l'équation $e^{2x} + 4me^{x} - 2m + 2 = 0$ possède une solution.

Exercice 15.**

On reprend l'équation de l'exercice précédent :

$$e^{2x}+4me^{x}-2m+2=0 \quad (1).$$

1. Déterminer suivant les valeurs de m les solutions de l'équation (1) en fonction de m.

2. Résoudre l'équation $e^{2x}-8e^{x}+6=0$ sans utiliser la question précédente.

3. Donner, en utilisant la question 1, les solutions de l'équation $e^{2x}-8e^{x}-6=0$.

Solution

1. On reprend le résumé de l'exercice précédent :

- Si $m\in\left]-\infty;-1\right[$ alors l'équation $X^2+4mX-2m+2=0$ possède deux solutions strictement positives : $\Delta=8(m+1)(2m-1)$.

$X_1=-2m-\sqrt{2(m+1)(2m-1)}$ et $X_2=-2m+\sqrt{2(m+1)(2m-1)}$.

Donc les solutions de (1) si $m\in\left]-\infty;-1\right[$ sont :

$$\boxed{x_1=\ln\left(-2m-\sqrt{2(m+1)(2m-1)}\right)}$$

$$\boxed{x_2=\ln\left(-2m+\sqrt{2(m+1)(2m-1)}\right)}$$

- Si $m\in\left]-1;1\right]$ alors l'équation $e^{2x}+4me^{x}-2m+2=0$ ne possède pas de solution.

- Si $m\in\left]1;+\infty\right[$ alors l'équation $e^{2x}+4me^{x}-2m+2=0$ possède une solution.

L'équation $X^2+4mX-2m+2=0$ possède deux solutions :

$X_1=-2m-\sqrt{2(m+1)(2m-1)}$ et $X_2=-2m+\sqrt{2(m+1)(2m-1)}$

On a : $X_1<0$ et $X_2>0$ donc si $m\in\left]1;+\infty\right[$ l'équation (1) possède une solution $\boxed{x_1=\ln\left(-2m+\sqrt{2(m+1)(2m-1)}\right)}$.

- Si $m=-1$ alors l'équation (2) possède une racine double qui est positive : $X=\dfrac{-4m}{2}=-2m=2$ donc l'équation (1) possède une solution : $e^{x}=2\Leftrightarrow\boxed{x=\ln(2)}$.

2. On pose $X = e^x$ l'équation $e^{2x} - 8e^x + 6 = 0$ s'écrit :

$$X^2 - 8X + 6 = 0.$$

$$X_1 = \frac{8 - 2\sqrt{10}}{2} = 4 - \sqrt{10} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{8 + 2\sqrt{10}}{2} = 4 + \sqrt{10}.$$

Ces deux solutions sont strictement positives donc :

$$\left(e^{2x} - 8e^x + 6 = 0\right) \Leftrightarrow \left(e^x = 4 - \sqrt{10} \text{ ou } e^x = 4 + \sqrt{10}\right).$$

$$\left(e^{2x} - 8e^x + 6 = 0\right) \Leftrightarrow \left(\boxed{x = \ln\left(4 - \sqrt{10}\right)} \text{ ou } \boxed{x = \ln\left(4 + \sqrt{10}\right)}\right).$$

3. Si $m = -2$ alors l'équation (1) s'écrit $e^{2x} - 8e^x - 2 = 0$.

D'après la question 1 comme $m \in \left]-\infty ; -1\right[$, on a :

$$x_1 = \ln\left(-2m - \sqrt{2(m+1)(2m-1)}\right) = \boxed{\ln\left(4 - \sqrt{10}\right)}.$$

$$x_2 = \ln\left(-2m + \sqrt{2(m+1)(2m-1)}\right) = \boxed{\ln\left(4 + \sqrt{10}\right)}.$$

✓ *Résoudre une inéquation*

Exercice 16.

1. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $-1 < \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} < 1$.

2. Montrer que l'équation $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = a$ admet une solution et une seule si $a \in \left]-1 ; 1\right[$.

Solution

1. Pour tout réel x, on a : $-e^{2x} - 1 < e^{2x} - 1 < e^{2x} + 1$ et comme $e^{2x} + 1 > 0$, en divisant par $e^{2x} + 1$, on a : $\boxed{-1 < \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} < 1}$.

2. Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}\left(e^{2x} + 1\right) - 2e^{2x}\left(e^{2x} - 1\right)}{\left(e^{2x} + 1\right)^2}$.

$f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{\left(e^{2x} + 1\right)^2} > 0$. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de l'intervalle

$\left]-1;1\right[$, l'équation $f(x)=a$ possède une unique solution réelle.

Exercice 17.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{\left(x^2\right)} > \left(e^x\right)^3 e$.

Solution

$e^{\left(x^2\right)} > \left(e^x\right)^3 e \Leftrightarrow e^{\left(x^2\right)} > e^{3x+1} \Leftrightarrow x^2 > 3x+1 \Leftrightarrow x^2-3x-1>0$.

On résout $x^2-3x-1=0$. $\Delta = 9+4=13$ donc il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ et le polynôme x^2-3x-1 est strictement positif à l'extérieur des racines donc :

$$e^{\left(x^2\right)} > \left(e^x\right)^3 e \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{13}}{2};+\infty\right[.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$\boxed{S = \left]-\infty;\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{13}}{2};+\infty\right[}.$$

Exercice 18.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{\left(x^2\right)}e^x < e^6$.

Solution

$\left(e^{\left(x^2\right)}e^x < e^6\right) \Leftrightarrow \left(e^{\left(x^2+x\right)} < e^6\right) \Leftrightarrow \left(x^2+x<6\right) \Leftrightarrow \left(x^2+x-6<0\right)$.

On résout $x^2+x-6=0$. $\Delta = 1+24=25$ donc $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$.

Le polynôme x^2+x-6 est strictement négatif à l'intérieur des racines donc $\left(e^{\left(x^2\right)}e^x < e^6\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left]-3;2\right[\right)$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc : $\boxed{S = \left]-3;2\right[}$.

Exercice 19. *

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{2e^x-1}{e^x-2} < \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Solution

Cette inéquation est définie pour x tel que $e^x-2 \neq 0$ c'est-à-dire si $x \neq \ln(2)$. On pose $X = e^x$ l'inéquation s'écrit alors : $\dfrac{2X-1}{X-2} < \dfrac{X}{X+1}$.

$$\left(\frac{2X-1}{X-2} < \frac{X}{X+1}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2X-1}{X-2} - \frac{X}{X+1} < 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{X^2+3X-1}{(X-2)(X+1)} < 0\right).$$

Les racines du polynôme X^2+3X-1 sont $X_1 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $X_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. On a $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$. Comme $X = e^x > 0$, on ne conserve que la solution positive.

X	0		$\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$		2		$+\infty$
X^2-3X-1		$-$	0	$+$		$+$	
$X-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$X+1$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{X^2-3X-1}{(X-2)(X+1)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc $\left(\frac{X^2-3X-1}{(X-2)(X+1)} < 0 \text{ et } X > 0\right) \Leftrightarrow \left(X \in \left]\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, 2\right[\right)$

Et donc $\left(\frac{2e^x-1}{e^x-2} < \frac{e^x}{e^x+1}\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left]\ln\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right), \ln(2)\right[\right)$.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\boxed{S = \left]\ln\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right), \ln(2)\right[}.$$

Exercice 20.

1. Soit a et b deux réels distincts quelconques, montrer que :

$$\frac{e^a+e^b}{2} > e^{\frac{a+b}{2}}.$$

2. Donner une interprétation géométrique de cette inégalité.

Solution

1. a est différent de b donc $\left(\frac{e^{\frac{a}{2}}}{2} - \frac{e^{\frac{b}{2}}}{2}\right)^2 > 0$.

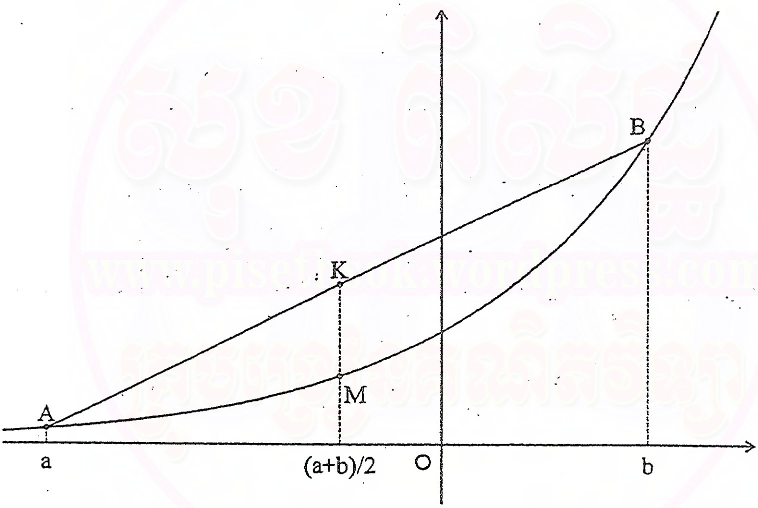
En développant le membre de gauche, on obtient : $\frac{e^a}{4} + \frac{e^b}{4} - \frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{2} > 0$

soit $\dfrac{e^a + e^b}{4} > \dfrac{e^{\frac{a+b}{2}}}{2}$ donc $\boxed{\dfrac{e^a + e^b}{2} > e^{\frac{a+b}{2}}}$.

2. Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on trace le graphe de la fonction exponentielle puis on place les points $A\left(a, e^a\right)$ et $B\left(b, e^b\right)$.

On peut remarquer que la corde $[AB]$ est, sur $\left[a\,;b\right]$, au dessus de la représentation graphique de la fonction exponentielle.

Le milieu K de $\left[A\,;B\right]$ dont les coordonnées sont $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\dfrac{e^a+e^b}{2}\right)$ est au dessus du point $M\left(\dfrac{a+b}{2}\,;e^{\frac{a+b}{2}}\right)$ donc $\dfrac{e^a+e^b}{2} > e^{\frac{a+b}{2}}$.



Représentation graphique de la fonction exponentielle.

✓ Résoudre un système d'équations

Exercice 21.

Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases} e^{y-x} = e \\ \dfrac{e^{2x}}{e^y} = \dfrac{1}{e^3} \end{cases}$

Solution

$$\begin{cases} e^{y-x} = e \\ \dfrac{e^{2x}}{e^y} = \dfrac{1}{e^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{y-x} = e \\ e^{2x-y} = e^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 1 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}}.$$

Exercice 22.

Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases} e^{2x+1} - e^y = -e \\ e^{2x+1} + e^y = 5e \end{cases}$

Solution

On pose $X = e^{2x+1}$ et $Y = e^y$. On résout le système :

$$(S)\begin{cases} X - Y = -e \\ X + Y = 5e \end{cases}.$$

En additionnant on obtient $2X = 4e$ donc $X = 2e$ et en retranchant on obtient $2Y = 6e$ donc $Y = 3e$.

Comme nous n'avons pas raisonné par équivalence, il faut vérifier que $(2e, 3e)$ est solution de (S). On a : $2e - 3e = -e$ et $2e + 3e = 5e$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2e \\ Y = 3e \end{cases}.$$

Comme ces deux solutions sont strictement positives, on a :

$$\begin{cases} e^{2x+1} - e^y = -e \\ e^{2x+1} + e^y = 5e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x+1} = 2e \\ e^y = 3e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = \ln(2e) \\ y = \ln(3e) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 1 + \ln(2) \\ y = 1 + \ln(3) \end{cases}.$$

Finalement $\begin{cases} e^{2x+1} - e^y = -e \\ e^{2x+1} + e^y = 5e \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{\ln(2)}{2} \\ y = 1 + \ln(3) \end{cases}}$.

Exercice 23.

Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases} e^{2x-1} + e^{3-y} = 5e \\ 2e^{2x-1} - 3e^{3-y} = 5 \end{cases}$

Solution

On pose $X = e^{2x-1}$ et $Y = e^{3-y}$. On résout le système :

$$\begin{cases} X + Y = 5e \\ 2X - 3Y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 5e - Y \\ 2(5e - Y) - 3Y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 5e - Y \\ Y = 2e - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3e + 1 \\ Y = 2e - 1 \end{cases}.$$

Comme ces deux solutions sont strictement positives, on a :

$$\begin{cases} e^{2x-1} + e^{3-y} = 5e \\ 2e^{2x-1} - 3e^{3-y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x-1} = 3e + 1 \\ e^{3-y} = 2e - 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} e^{2x-1} + e^{3-y} = 5e \\ 2e^{2x-1} - 3e^{3-y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \ln(3e+1) \\ 3 - y = \ln(2e-1) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ln(3e+1) + \dfrac{1}{2} \\ y = 3 - \ln(2e-1) \end{cases}}.$$

Exercice 24.

Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases} e^x \times e^y = 5 \\ x \times y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Solution

$\begin{cases} e^x \times e^y = 5 \\ x \times y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = 5 \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \ln(5) \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Les solutions de ce dernier système sont les solutions de l'équation de second degré :

$$X^2 - X\ln(5) + \frac{1}{2} = 0.$$

$\Delta = \ln^2(5) - 2$. Ce discriminant étant strictement positif ($\Delta \approx 0.59$), on a : $X_1 = \dfrac{\ln(5) - \sqrt{\ln^2(5) - 2}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{\ln(5) + \sqrt{\ln^2(5) - 2}}{2}$.

Si on désigne par S l'ensemble solution du système $\begin{cases} e^x \times e^y = 5 \\ x \times y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, on a :

$$\boxed{S = \left\{\left(X_1, X_2\right); \left(X_2, X_1\right)\right\}}.$$

✓ Encadrement de e

Exercice 25.

Pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, on pose $g(x) = e^{-x}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ et $h(x) = e^{-x}(1 + x + x^2)$.

1. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0;1]$, $g(x) < 1$ et $h(x) > 1$.
2. En déduire que $2.5 < e < 3$.

Solution

1. On a $g'(x) = -\dfrac{x^2}{2}e^{-x}$ et $h'(x) = x(1-x)e^{-x}$. Sur $[0;1]$, g est

strictement décroissante et h est strictement croissante. Comme $g(0)=h(0)=1$, pour tout x appartenant à $]0;1]$ on a $\boxed{g(x)<1}$ et $\boxed{h(x)>1}$.

2. Comme $g(1)=2.5\times\frac{1}{e}$ et $h(1)=3\times\frac{1}{e}$ on a : $\boxed{2.5<e<3}$.

Remarque : on montre plus généralement que si $n\geq 2$ alors $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<e<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}$.

Ce qui s'écrit encore : $0<e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{1}{n!}$.

Application : pour $n=10$ on obtient :

$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{10!}=\frac{9864101}{3628800}\approx 2.7182818011$.

$\frac{1}{10!}=\frac{1}{3628800}<10^{-6}$ donc $\boxed{e=2.718281}$ à 10^{-6} près par défaut.

II. *Limites*

✓ *Limites du cours*

Exercice 26.

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

Solution

- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty}$. C'est une limite du cours dont voici une démonstration. On pose pour tout $x\geq 0$, $\varphi(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$. On a $\varphi'(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$ et $\varphi''(x)=e^x-1$. Si $x\geq 0$ alors $e^x\geq 1$ donc $\varphi''(x)\geq 0$ et φ' est croissante sur $[0;+\infty[$. Comme $\varphi'(0)=1$, on a ,pour tout $x\in[0;+\infty[$, $\varphi'(x)\geq 0$ et φ est croissante sur $[0;+\infty[$. $\varphi(0)=1$ donc, pour tout $x\in[0;+\infty[$, $\varphi(x)\geq 0$ et donc $e^x\geq\frac{x^2}{2}$.

Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\frac{e^x}{x}\geq\frac{x}{2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty}$.

- $\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}$. C'est une limite du cours dont voici une démonstration. On peut écrire $xe^x = -\frac{-x}{e^{-x}}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty \text{ d'où } \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = 0 . \boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}.$$

- $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$. C'est une limite du cours dont voici une démonstration. La fonction exponentielle est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 est 1. $\frac{e^x-1}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0 donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$.

✓ *Limites avec des polynômes*

Ceux dont les professeurs ont donné les théorèmes sur les limites des fonctions polynômes ou rationnelles en $+\infty$ ou en $-\infty$ peuvent aller plus vite.

Exercice 27.

Soit $f(x) = e^{(5-x)}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution

On a $\lim_{x\to+\infty} (5-x) = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions $\lim_{x\to+\infty} e^{(5-x)} = 0$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$. De même $\lim_{x\to-\infty} (5-x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} e^{(5-x)} = +\infty$ et $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

Exercice 28.

Soit $f(x) = e^{(x^3-2x^2+3x+1)}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution

On pose $u(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, on a $f(x) = e^{u(x)}$.

Pour tout réel non nul x : $u(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$. $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et

$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

Comme $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\lim_{x\to-\infty} e^{u(x)} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{u(x)} = +\infty$. Donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

*Exercice 29.***

Soit $f(x) = (3x^4 - 2x + 1)e^{(-5x^3 - x^2 - 1)}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$ (on pourra utiliser $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$).

Solution

On pose : $u(x) = 3x^4 - 2x + 1$ et $v(x) = -5x^3 - x^2 - 1$.

On a : $f(x) = u(x)e^{v(x)}$.

Pour tout x non nul :

$$u(x) = 3x^4\left(1 - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{3x^4}\right) \text{ et } v(x) = -5x^3\left(1 + \frac{1}{5x} + \frac{1}{5x^3}\right).$$

On a $\lim_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} v(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$.

- Limite de f en $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty} v(x) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} e^{v(x)} = +\infty$. D'autre part $\lim_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} u(x)e^{v(x)} = +\infty$. $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

- Limite de f en $+\infty$: pour tout x tel que $v(x) \neq 0$, on a $f(x) = \frac{u(x)}{v^2(x)} \times v^2(x) \times e^{v(x)}$. $\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} X^2 e^X = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} v^2(x) \times e^x = 0$.

$$\frac{u(x)}{v^2(x)} = \frac{3x^4}{25x^6} \times \frac{\left(1 - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{3x^4}\right)}{\left(1 + \frac{1}{5x} + \frac{1}{5x^3}\right)^2} = \frac{3}{25x^2} \times \frac{\left(1 - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{3x^4}\right)}{\left(1 + \frac{1}{5x} + \frac{1}{5x^3}\right)^2}.$$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{5x} + \frac{1}{5x^3}\right)^2 = 1$, $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{3x^4}\right) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{25x^2} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{v^2(x)} = 0$. On a $\lim_{x\to+\infty} v^2(x) \times e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = 0$ donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{v^2(x)} \times v^2(x) \times e^{v(x)} = 0$. Finalement $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

✓ *Limites avec des fonctions rationnelles*

Exercice 30.

Soit $f(x) = e^{\frac{1}{2x+5}}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+5) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2x+5)} = 0$. La fonction exponentielle étant continue en 0, on a $\lim\limits_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$.

D'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{2x+5}} = 1$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$.

Exercice 31.

Soit $f(x) = e^{\left(\frac{3x^5-2x+5}{2x^4+5x^2+3}\right)}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution

On pose $u(x) = \dfrac{3x^5 - 2x + 5}{2x^4 + 5x^2 + 3}$. Pour tout x non nul, on a :

$$u(x) = \frac{3x^5\left(1 - \frac{2}{3x^4} + \frac{5}{3x^5}\right)}{2x^4\left(1 + \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{2x^4}\right)} = \frac{3}{2}x \times \frac{\left(1 - \frac{2}{3x^4} + \frac{5}{3x^5}\right)}{\left(1 + \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{2x^4}\right)}.$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(1 - \frac{2}{3x^4} + \frac{5}{3x^5}\right)}{\left(1 + \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{2x^4}\right)} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{u(x)} = +\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(1 - \frac{2}{3x^4} + \frac{5}{3x^5}\right)}{\left(1 + \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{2x^4}\right)} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{u(x)} = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$.

✓ *Limites avec des quotients*

Exercice 32.

Soit $f(x) = \dfrac{e^{(3x-2)}}{x}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution

- Pour tout $x > \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{e^{(3x-2)}}{x} = \dfrac{3x-2}{x} \times \dfrac{e^{(3x-2)}}{3x-2}$. Il est clair que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-2}{x} = 3$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{(3x-2)}}{3x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{(3x-2)}}{x} = +\infty$. $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x-2) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x-2} = 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{(3x-2)}}{x} = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 33.

Soit $f(x) = \dfrac{e^{7-2x}}{5x}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (7-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{(7-2x)} = 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{5x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{7-2x}}{5x} = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

- Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^* - \{7\}$, on a :

$$f(x) = \frac{e^{7-2x}}{5x} = \frac{7-2x}{5x} \times \frac{e^{7-2x}}{7-2x}.$$

On pose $u(x) = \dfrac{7-2x}{5x}$ et $v(x) = \dfrac{e^{7-2x}}{7-2x}$ donc $f(x) = u(x) \times v(x)$.

$\dfrac{7-2x}{5x} = \dfrac{-2x\left(1 - \dfrac{7}{2x}\right)}{5x} = -\dfrac{2}{5}\left(1 - \dfrac{7}{2x}\right)$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\dfrac{2}{5}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} v(x) = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) \times v(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{7-2x}}{5x} = -\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

Exercice 34.

Soit $f(x) = \dfrac{5x-2}{e^x+1}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution

- Pour tout x non nul, on a $\dfrac{5x-2}{e^x+1} = \dfrac{x\left(5-\dfrac{2}{x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{5-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{e^x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\dfrac{2}{x}\right) = 5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{e^x}} = 5$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-2}{e^x+1} = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x-2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

Exercice 35.

Soit $f(x) = \dfrac{e^{x^5}-1}{x}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution

- Pour tout x non nul, on a $\dfrac{e^{x^5}-1}{x} = x^4 \times \dfrac{e^{x^5}}{x^5} \times \left(1-\dfrac{1}{e^{x^5}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^5} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^{x^5}}\right) = 1$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^5}}{x^5} = +\infty$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^5} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x^5}-1\right) = -1$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 36.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^x-5}$.

Solution

Pour tout réel x différent de $\ln 5$, on a :

$$\frac{e^{2x}+1}{e^x-5}=\frac{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^x\left(1-\frac{5}{e^x}\right)}=e^x\times\frac{1+\frac{1}{e^{2x}}}{1-\frac{5}{e^x}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{e^x}\right)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{e^{2x}}}{1-\frac{5}{e^x}}=1$. Comme

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^x-5}=+\infty}$.

*Exercice 37.***

1. Montrer par récurrence que, pour tout réel strictement positif x et pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}.$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x non nul, on pose : $u(x)=\frac{1}{x^n}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}\right)$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$.

Solution

1. Pour tout entier naturel non nul n, on note P_n la proposition :

« Pour tout réel strictement positif x, $e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$ ».

Si on note C la représentation graphique de la fonction exponentielle alors la droite T d'équation $y=x+1$ est la tangente à C au point d'abscisse 0. La droite T est en dessous de C sur $\mathbb{R}$ (exercice 73) donc $e^x>1+x$ et P_1 est vraie. Soit n un entier naturel non nul. Supposons P_n vraie. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2!}-\dots-\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

g est définie et dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$.

$g'(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2!}-\dots-\dfrac{x^n}{n!}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$.

D'autre part $g(0)=1$ donc, pour tout réel x strictement positif, $g(x)>1$ donc $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}$ et $P_{(n+1)}$ est vraie.

La proposition P_n est vraie au rang 1 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel non nul.

2. $u(x)=\dfrac{1}{x^n}+\dfrac{1}{x^{(n-1)}}+\dfrac{1}{x^{(n-2)}\times 2!}+\dots+\dfrac{1}{x\times(n-1)!}+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{x}{(n+1)!}$.

n est un entier naturel non nul fixé donc, pour tout $p\in\{0;1;2;\dots;n\}$ le nombre $\dfrac{1}{p!}$ est un nombre fini même si x tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(n+1)!}=+\infty$ et pour tout $p\in\{0;1;2;\dots;n-1\}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{p!x^{(n-p)}}=0$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty}$.

3. D'après la question 1, pour tout entier n non nul et pour tout x strictement positif, $e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}$.

Or $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}=x^n\times u(x)$ donc $e^x\geq x^n\times u(x)$.

D'où $\dfrac{e^x}{x^n}\geq u(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$.

Un théorème de comparaison donne alors $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty}$.

✓ *Limite d'un taux d'accroissement*

Exercice 38.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}$.

Solution

$\lim\limits_{x\to 0}3x=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$ (cours). D'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}=1}$.

Exercice 39.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{x}$

Solution

Pour tout x non nul, on a $\dfrac{e^{5x}-1}{x}=5\times\dfrac{e^{5x}-1}{5x}$, $\lim\limits_{x\to 0}5x=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^{X}-1}{X}=1$. D'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{5x}=1$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{x}=5}$.

Exercice 40.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{x}$.

Solution

Pour tout x non nul, $\dfrac{e^{x^3}-1}{x}=x^2\times\dfrac{e^{x^3}-1}{x^3}$. $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^{X}-1}{X}=1$. D'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{x^3}=1$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x}=0}.$$

Exercice 41.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}$.

Solution

$\dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}$ est le taux d'accroissement en 0 de la fonction $x\mapsto e^{\sin(x)}$. Cette fonction est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 est $\cos(0)e^{\sin(0)}=1$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}=1}$.

Remarque : on peut aussi écrire $\dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}=\dfrac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(x)}\times\dfrac{\sin(x)}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1\end{array}\right\}$$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(x)}=1$. D'autre part $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ d'où

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x)}-1}{x}=1}.$$

*Exercice 42.**

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)}$

Solution

On utilise la formule $\cos(2a)=1-2\sin^2(a)$.

Pour tout réel x, on a : $1-\cos(x)=2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Pour tout réel x différent de 0 $[\mathrm{mod}\,2\pi]$, on a :

$$\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\times\frac{x^2}{1-\cos(x)}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\times\frac{x^2}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^{X}-1}{X}=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}=1$.

$\dfrac{x^2}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=2\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2}=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{X}{\sin(X)}=1$.

D'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=1.$$

Comme la fonction $x\mapsto 2x^2$ est continue en 1, $\lim\limits_{x\to 1}2x^2=2$ et d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}2\times\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2=2.$$

Finalement, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)}=2}$.

✓ *Limites avec des racines carrées*

Exercice 43.

Déterminer la limite de $f(x)=\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et quand x tend vers $+\infty$.

Solution

- Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}=\dfrac{e^x-1}{x}\times\sqrt{x}$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}=0}$.

- Quand x tend vers $+\infty$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\times\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}=+\infty}$.

Exercice 44.

Déterminer la limite de $f(x)=\sqrt{x}\times e^{-x^2}$ en $+\infty$.

Solution

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\sqrt{x}\times e^{-x^2}=\dfrac{x^2}{e^{x^2}}\times\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}=0$ donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}=0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=0$, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\times e^{-x^2}=0}$.

*Exercice 45.**

Déterminer la limite de $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ en 1.

Solution

- Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures :

$f(x)=\sqrt{x}\times\dfrac{1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$. $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x}=1$ (car la fonction racine est continue en 1). $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty}$.

- Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

$f(x) = \sqrt{x} \times \dfrac{1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$. $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{x} = 1$. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$. Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0}$.

✓ *Limites avec des fonctions trigonométriques*

Exercice 46.

Soit $f(x) = x^3 e^{\cos(x)}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Solution

Pour tout réel x, on a : $-1 \le \cos(x) \le 1$. Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $\dfrac{1}{e} \le e^{\cos(x)} \le e$.

- Si $x > 0$ alors $\dfrac{x^3}{e} \le x^3 e^{\cos(x)}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{\cos(x)} = +\infty$ (théorème de comparaison). $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

- Si $x < 0$ alors $x^3 e^{\cos(x)} \le \dfrac{x^3}{e}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{e} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{\cos(x)} = -\infty$. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

Exercice 47.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$.

Solution

Pour tout réel x différent de $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = e^{-x} \times \frac{e^{2x} - 1}{\sin(x)} = e^{-x} \times \frac{e^{2x} - 1}{x} \times \frac{x}{\sin(x)}.$$

$\lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \times 1 = 2$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(x)} = 1$ (car on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$) donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = 2}$.

✓ *Limites avec des logarithmes*

Exercice 48.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \times \ln(1+e^{x})$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution

- Pour tout réel x, on a $f(x) = e^{-x} \times \ln(1+e^{x}) = \dfrac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}}$.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (taux d'accroissement en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$) donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}} = 1$ soit

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}.$$

- Pour tout réel x on a :

$f(x) = e^{-x} \times \ln\left(e^{x}(1+e^{-x})\right) = e^{-x}\left(\ln(e^{x}) + \ln(1+e^{-x})\right)$

donc $f(x) == xe^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x}) = \dfrac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(1+X) = 0$ donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^{-x}) = 0$. Finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

III. *Continuité*

Exercice 49.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ?

Solution

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $u(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $v(x) = e^{x}$.

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction v est continue sur $\mathbb{R}$ avec $u\left(\mathbb{R}^*\right) \subset \mathbb{R}$ donc $v \circ u$, c'est-à-dire f, est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a : $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Comme $f(0) = 0$, la fonction f est continue en 0.

Exercice 50.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est continue en 0.

Solution

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^*$, on a $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}}$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. La fonction f est continue en 0.

Exercice 51.

Pour tout x appartenant à $\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{\sin(x)} \text{ et } f(0) = 1.$$

Montrer que f est continue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Solution

Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto e^{2x} - e^x$ sont continues sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right[$ et sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, f est un quotient de fonctions continues (le dénominateur ne s'annulant pas) donc f est continue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Pour x non nul on a : $f(x) = \dfrac{e^x\left(e^x - 1\right)}{\sin(x)} = e^x \times \dfrac{x}{\sin(x)} \times \dfrac{e^x - 1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ car la fonction exponentielle est continue en 0.

D'autre part on sait que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ et f est continue en 0.

La fonction f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et en 0 donc f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

IV. *Dérivation*

✓ *Techniques élémentaires*

Exercice 52.

Déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Solution

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = -x$.

$f(x) = u(x) \times e^{v(x)}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$, $v'(x) = -1$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$f'(x) = u'(x) \times e^{v(x)} + u(x) \times v'(x) e^{v(x)} = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$.

$$\boxed{f(x) = x(2 - x)e^{-x}}.$$

Exercice 53.

Déterminer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$:

1. $f(x) = e^{2x} \times \sin(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. $g(x) = e^{-2x} \times \cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
3. $h(x) = e^{-x} \times \tan(x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Solution

1. Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = 2x$.

$f(x) = u(x) \times e^{v(x)}$.

$f'(x) = u'(x) \times e^{v(x)} + u(x) \times v'(x) \times e^{v(x)}$.

$f'(x) = e^{2x} \times \cos(x) + 2e^{2x} \times \sin(x)$.

Pour tout réel x : $\boxed{f'(x) = e^{2x}(2\sin(x) + \cos(x))}$.

2. Pour tout réel x, on pose $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = -2x$.

$g(x) = u(x) \times e^{v(x)}$.

$g'(x) = u'(x) \times e^{v(x)} + u(x) \times v'(x) \times e^{v(x)}$.

$g'(x) = -\sin(x) \times e^{-2x} - 2\cos(x) \times e^{-2x}$.

Pour tout réel x : $\boxed{g'(x) = -e^{-2x}(2\cos(x) + \sin(x))}$.

3. Pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on pose $u(x) = \tan(x)$ et $v(x) = -x$. $h(x) = u(x) \times e^{v(x)}$.

$h'(x) = u'(x) \times e^{v(x)} + u(x) \times v'(x) \times e^{v(x)}$.

$h'(x) = \left(1 + \tan^2(x)\right) \times e^{-x} - \tan(x) \times e^{-x}$. Pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\boxed{h'(x) = e^{-x}\left(1 - \tan(x) + \tan^2(x)\right)}.$$

Exercice 54.

Déterminer la fonction dérivée de f définie par $f(x) = e^{2x} \times \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution

Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$ on pose $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 2x$.

$f(x) = u(x) \times e^{v(x)}$. $f'(x) = u'(x) \times e^{v(x)} + u(x) \times v'(x) \times e^{v(x)}$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{2x} + 2\sqrt{x} \times e^{2x}$. Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{f'(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\right)}.$$

Exercice 55.

Déterminer la fonction dérivée de f définie par $f(x) = \frac{2e^x - 3x}{x^2 + e^x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Solution

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, on pose $u(x) = 2e^x - 3x$ et $v(x) = x^2 + e^x$ donc $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$u'(x) = 2e^x - 3$ et $v'(x) = 2x + e^x$.

Comme pour tout réel x, $v(x) \neq 0$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}.$$

$$f'(x) = \frac{(2e^x - 3)(x^2 + e^x) - (2e^x - 3x)(2x + e^x)}{(x^2 + e^x)^2}.$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} + 2x^2e^x - 3e^x - 3x^2 - 2e^{2x} - xe^x + 6x^2}{(x^2 + e^x)^2}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{(2x^2 - x - 3)e^x + 3x^2}{(x^2 + e^x)^2}}.$$

✓ *Dérivabilité en a*

Exercice 56.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue et dérivable en 0.

Solution

Continuité en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = 0$ et $f(0) = 0$ donc f est continue en 0.

Dérivabilité en 0..

Le taux d'accroissement de f en 0 est $\frac{f(x) - f(0)}{x} = e^{-\frac{1}{x}}$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = 0}$.

Exercice 57.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) \times e^{-\frac{1}{x^2}}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ puis étudier la continuité de f en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis étudier la dérivabilité de f en 0.

Solution

1. La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (composée de fonctions

continues) la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (produit de fonctions continues).

Continuité en 0 .

$\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ car la fonction sinus est continue en 0 .

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-1}{x^2}} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sin(x) \times e^{\frac{-1}{x^2}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

La fonction f est donc continue en 0 . Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (composée de fonctions dérivables) la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (produit de fonctions dérivables).

Dérivabilité en 0 .

Pour tout réel x non nul, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \times e^{\frac{-1}{x^2}}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-1}{x^2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \times e^{\frac{-1}{x^2}}\right) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$, la fonction f est dérivable en 0 et on a $\boxed{f'(0) = 0}$.

Exercice 58.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) \times e^{-\frac{1}{x^2}}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la continuité de f en 0 .

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la dérivabilité de f en 0 .

1. La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (composée de fonctions continues) et la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (produit de fonctions continues).

$\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$ car la fonction cosinus est continue en 0 .

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{-1}{x^2}}=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(x)\times e^{\frac{-1}{x^2}}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$.

La fonction f est donc continue en 0. Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x\mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (composée de fonctions dérivables) la fonction $x\mapsto\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (produit de fonctions dérivables).

Dérivabilité en 0.

Pour tout réel x non nul,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}=-x\times\cos(x)\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)\times e^{\frac{-1}{x^2}}.$$

On a $\lim\limits_{x\to 0}(-x\times\cos(x))=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{-1}{x^2}}=0$. D'où $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos(x)\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\times e^{\frac{-1}{x^2}}\right)=0$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$, la fonction f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0)=0}$.

Exercice 59.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}\times e^{-\frac{1}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la continuité de f en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la dérivabilité de f en 0.

Solution

1. La fonction $x\mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (composée de fonctions continues) et la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (même sur $\mathbb{R}_+$) donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (produit de fonctions continues).

Continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ car la fonction racine est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-1}{x}} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x} \times e^{\frac{-1}{x}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0. Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (composée de fonctions dérivables) et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (produit de fonctions dérivables).

Dérivabilité en 0.

Si $x > 0$ alors $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} \times e^{\frac{-1}{x}} = -\sqrt{x} \times \left(\dfrac{-1}{x}\right) \times e^{\frac{-1}{x}}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} (-\sqrt{x}) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} Xe^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{-1}{x}\right) \times e^{\frac{-1}{x}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. La fonction f est dérivable en 0 et on a :

$$\boxed{f'(0) = 0}.$$

✓ *Exponentielle et polynôme*

Exercice 60.

Déterminer l'ensemble sur lequel la fonction f, définie par $f(x) = e^{-x^2}$, est dérivable puis calculer sa dérivée.

Solution

Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x^2$, donc $f(x) = e^{u(x)}$. Comme les fonctions u et exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.. $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -2xe^{-x^2}$ donc $\boxed{f'(x) = -2xe^{-x^2}}$.

Exercice 61.

Déterminer l'ensemble sur lequel la fonction f, définie par $f(x) = e^{(5x^3-3x^2+2x-1)}$, est dérivable puis calculer sa dérivée.

Solution

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. $f(x) = e^{u(x)}$.

Comme les fonctions u et exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$. $\boxed{f'(x) = \left(15x^2 - 6x + 2\right)e^{\left(5x^3 - 3x^2 + 2x - 1\right)}}$.

✓ *Exponentielle et fonction rationnelle*

Exercice 62.

Déterminer l'ensemble sur lequel la fonction f, définie par $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$, est dérivable puis calculer sa dérivée.

Solution

Pour tout réel x différent de 1 et de -1, on pose $u(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$. On a $f(x) = e^{u(x)}$. La fonction u est une fonction rationnelle définie pour x différent de 1 et -1. Elle est donc dérivable sur $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$. Comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$.

Pour tout réel x différent de 1 et de -1, on a :

$$u'(x) = \frac{1\left(x^2 - 1\right) - x \times 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = -\frac{x^2 + 1}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$

Donc $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ soit $\boxed{f'(x) = -\dfrac{x^2 + 1}{\left(x^2 - 1\right)^2} e^{\frac{x}{x^2 - 1}}}$.

Exercice 63.

Déterminer l'ensemble sur lequel la fonction f, définie par $f(x) = x \times e^{\frac{2x^2+3}{x^2+1}}$, est dérivable puis calculer sa dérivée.

Solution

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ et $v(x) = x$ donc $f(x) = v(x)e^{u(x)}$. La fonction rationnelle u est définie sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $u'(x) = \dfrac{-2x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

Les fonctions $x \mapsto e^x$, u et v étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = v'(x)e^{u(x)} + v(x)u'(x)e^{u(x)}.$$

$$f'(x)=e^{\frac{2x^2+3}{x^2+1}}+x\times\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\times e^{\frac{2x^3+3}{x^2+1}}=e^{\frac{2x+3}{x^2+1}}\left[1+\frac{-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\right].$$

$$f'(x)=e^{\frac{2x+3}{x^2+1}}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\right].\quad \boxed{f'(x)=e^{\frac{2x+3}{x^2+1}}\left[\frac{x^4+1}{\left(x^2+1\right)^2}\right]}.$$

✓ *Exponentielle et fonction trigonométrique*

Exercice 64.

Justifier la dérivabilité de la fonction f puis calculer $f'(x)$.

1. $f(x)=e^{\sin(x)}$ pour $x\in\mathbb{R}$.
2. $f(x)=e^{\cos(x)}$ pour $x\in\mathbb{R}$.
3. $f(x)=e^{\tan(x)}$ pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Solution

1. Pour tout réel x, on pose $u(x)=\sin(x)$.

Les fonctions u et exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f est la composée de ces deux fonctions, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$u'(x)=\cos(x)$ donc $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\boxed{\cos(x)e^{\sin(x)}}$.

2. Pour tout réel x, on pose $u(x)=\cos(x)$

Les fonctions u et exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f est la composée de ces deux fonctions, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$u'(x)=-\sin(x)$ donc $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\boxed{-\sin(x)e^{\cos(x)}}$.

3. Pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ on pose $u(x)=\tan(x)$

La fonction u est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$u'(x)=1+\tan^2(x)$ donc $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

$$\boxed{f'(x)=\left(1+\tan^2(x)\right)e^{\tan(x)}}$$

Exercice 65.

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\sin(x)e^{\cos(x)}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

Solution

Les fonction sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \cos(x) \times e^{\cos(x)} - \sin^2(x) \times e^{\cos(x)} = e^{\cos(x)}\left(\cos(x) - \sin^2(x)\right).$$

$$\boxed{f'(x) = \left(\cos^2(x) + \cos(x) - 1\right)e^{\cos(x)}}.$$

Exercice 66.

Justifier la dérivabilité de la fonction f, définie par $f(x) = \sin\left(e^{\cos(x)}\right)$, puis calculer sa dérivée.

Solution

Pour tout réel x, on pose $u(x) = e^{\cos(x)}$, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -\sin(x) \times e^{\cos(x)}$. On a : $f(x) = \sin(u(x))$.

Les fonctions u et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f est la composée de ces deux fonctions, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times \cos(u(x)) = \boxed{-\sin(x) \times e^{\cos(x)} \times \cos\left(e^{\cos(x)}\right)}.$$

Exercice 67.

Pour tout x appartenant à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, on pose : $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x}{\sin(x)}$.

Montrer que la fonction f est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ puis calculer sa dérivée.

Solution

Sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, f est un quotient de fonctions dérivables sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ (le dénominateur ne s'annulant pas), donc f est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout x appartenant à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, on pose $u(x) = e^{2x} - e^x$ et $v(x) = \sin(x)$ donc $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad u'(x) = 2e^{2x} - e^x \text{ et } v'(x) = \cos(x).$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\left(2e^{2x} - e^x\right)\sin(x) - \left(e^{2x} - e^x\right)\cos(x)}{\sin^2(x)}}.$$

✓ Exponentielle et racine carrée

Exercice 68.

On pose $f(x)=\sqrt{e^{-\frac{1}{x}}}$ si $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $f(0)=0$.
Justifier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer sa dérivée. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2x}}$ donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on pose $u(x)=\dfrac{-1}{2x}$ donc $f(x)=e^{u(x)}$. $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}=\dfrac{1}{2x^2}e^{-\frac{1}{2x}}=\dfrac{1}{2x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}=\boxed{\dfrac{1}{2x^2}\sqrt{e^{-\frac{1}{x}}}}$.

Dérivabilité en 0.

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^{-\frac{1}{2x}}}{x}=-2\left(\dfrac{-1}{2x}\right)\times e^{-\frac{1}{2x}}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{2x}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0$. D'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{2x}\times e^{-\frac{1}{2x}}=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$ donc la fonction f est dérivable en 0 et

$$\boxed{f'(0)=0}.$$

Exercice 69.

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Solution

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $u(x)=e^{\sqrt{x}}$ et $v(x)=\sqrt{x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $u'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2}-\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x}=\boxed{\frac{\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}.$$

Exercice 70.

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^2 e^{\sqrt{x}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Solution

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $f(x) = u(x) \times e^{v(x)}$. $f'(x) = u'(x) \times e^{v(x)} + u(x) \times v'(x) \times e^{v(x)}$.

$$f'(x) = 2xe^{\sqrt{x}} + \frac{x^2 e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = 2xe^{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{2} = \boxed{\frac{x(\sqrt{x}+4)e^{\sqrt{x}}}{2}}.$$

Dérivabilité en 0.

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2 e^{\sqrt{x}}}{x} = xe^{\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} e^X = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\sqrt{x}} = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^{\sqrt{x}} = 0$ et f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = 1}$.

✓ Exponentielle et fonction logarithme

Exercice 71.

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x - 1)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = \ln(x)$.

On a $f = v \circ u$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = e^x \times \frac{1}{e^x - 1} = \boxed{\frac{e^x}{e^x - 1}}.$$

Exercice 72.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln(x)$. Justifier le fait que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis déterminer sa dérivée.

Solution

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\ln(x) + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)}.$$

✓ ***Dérivées successives***

*Exercice 73.**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \cos(x)$.

1. Démontrer que $\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$f'(x) = Ae^x \cos(x + \alpha)$ où A et α sont deux constantes à déterminer.

3. Déterminer la dérivée d'ordre n (entier naturel non nul) de la fonction f.

Solution

1. $\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(a) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(a)\right)$.

$\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(a) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(a)\right)$.

$$\boxed{\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

2. Pour tout réel x, $f'(x) = e^x\cos(x) - e^x\sin(x)$.

$f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) = \sqrt{2}e^x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. $\boxed{A = \sqrt{2}}$ et $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n :

$$« \ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) \ ».$$

D'après la question 1, $f^{(1)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^1 e^x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ donc P_1 est vraie.

Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Supposons que P_n soit vraie.

Pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x\cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$. En dérivant on obtient $f^{(n+1)}(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n\left[e^x\cos\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)-e^x\sin\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

$f^{(n+1)}(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\left[\cos\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)\right]$. En utilisant la question 2, on a : $f^{(n+1)}(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\sqrt{2}\cos\left(x+n\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$.

$f^{(n+1)}(x)=\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^x\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{4}\right)$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la proposition P_n est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et donc, pour tout réel x, on a :

$$\boxed{f^{(n)}(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\cos\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)}.$$

V. Positions relatives d'une droite et de la courbe représentative de la fonction exponentielle

✓ Par rapport à une tangente

Exercice 74.

Soit (T) la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

1. Déterminer une équation de la droite (T).
2. Étudier la position relative de (T) et de la représentation graphique de la fonction exponentielle.

Solution

1. La fonction exponentielle est dérivable en 0, donc sa représentation graphique admet une tangente au point d'abscisse 0.

On a $\exp'(0)=\exp(0)=1$ donc (T) a pour équation $\boxed{y=x+1}$.

2. Pour tout réel x, on pose $f(x)=e^x-x-1$.

$f'(x)=e^x-1$. Si $x<0$ alors $e^x<1$ donc $f'(x)<0$ et si $x>0$ alors $e^x>1$ donc $f'(x)>0$. $f'(0)=1$.

f est strictement décroissante sur $\left]-\infty,0\right]$ et strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$. La fonction f admet donc un minimum global en 0.

Comme $f(0)=0$, pour tout réel x, $f(x)\geq 0$. (T) est en dessous de la représentation graphique de la fonction exponentielle.

Exercice 75.

Montrer que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au dessus de sa tangente au point d'abscisse a pour tout réel a.

Solution

Soit $a\in\mathbb{R}$. Une équation de la tangente (T_a) au point d'abscisse a est $y-e^a=e^a(x-a)$ c'est-à-dire $\boxed{y=xe^a+e^a-ae^a}$.

On pose $\varphi(x)=e^x-xe^a-e^a+ae^a$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

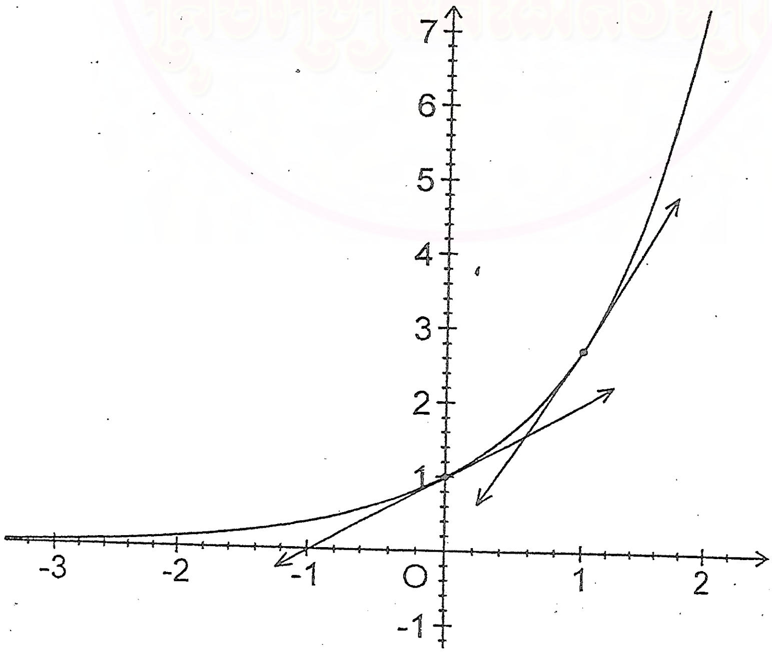
φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\varphi'(x)=e^x-e^a$.

φ est strictement décroissante sur $\left]-\infty;a\right]$ et φ est strictement croissante sur $\left[a;+\infty\right[$. φ admet donc un minimum global en a.

Comme $\varphi(a)=0$ on a, pour tout $x\neq a$, $\varphi(x)>0$.

Finalement, la représentation graphique de la fonction exponentielle est au dessus de toutes ses tangentes.

Remarque : on dit que la fonction exponentielle est une fonction convexe.



Représentation graphique de la fonction exponentielle ainsi que deux des tangentes à la courbe.

✓ *Par rapport à une droite*

Exercice 76.

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - 3x - 2$ pour tout réel x.

1. Étudier la fonction f et dresser le tableau de variation de f.

2. Soit (D) la droite d'equation $y = 3x + 2$. Montrer que la droite (D) coupe la courbe representative de la fonction exponentielle en deux points.

3. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Solution

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :

$f'(x) = e^x - 3$ et $\left(f'(x) = 0\right) \Leftrightarrow \left(e^x - 3 = 0\right) \Leftrightarrow \left(e^x = 3\right) \Leftrightarrow \left(x = \ln(3)\right)$.

$\left(f'(x) > 0\right) \Leftrightarrow \left(e^x - 3 > 0\right) \Leftrightarrow \left(e^x > 3\right) \Leftrightarrow \left(x > \ln(3)\right)$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \ln(3)\right]$.

La fonction f est strictement croissante sur $\left[\ln(3) ; +\infty\right[$.

La fonction f admet donc un minimum global en $x = \ln(3)$ et

$f(\ln(3)) = 3 - 3\ln(3) - 2 = 1 - 3\ln(3) < 0$.

Limite en $-\infty$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x - 2) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

Limite en $+\infty$: pour x non nul, on a : $f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 3 - \dfrac{2}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (cours) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 3 - \dfrac{2}{x}\right) = +\infty$.

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

x	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$1 - 3\ln(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Soit (D) la droite d'équation $y = 3x + 2$. Montrer que la droite (D) coupe la courbe représentative de la fonction exponentielle en deux points revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty;\ln(3)\right]$, donc f induit une bijection de $\left]-\infty;\ln(3)\right]$ sur $\left[1-3\ln(3);+\infty\right[$.

$0 \in \left[1-3\ln(3);+\infty\right[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet, sur $\left]-\infty;\ln(3)\right]$, une unique solution. La droite (D) coupe la courbe représentative de la fonction exponentielle en un point sur $\left]-\infty;\ln(3)\right]$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[\ln(3);+\infty\right[$, donc f induit une bijection de $\left[\ln(3);+\infty\right[$ sur $\left[1-3\ln(3);+\infty\right[$.

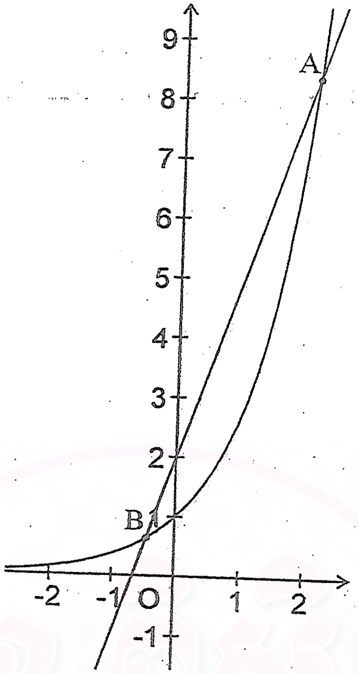
$0 \in \left[1-3\ln(3);+\infty\right[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet, sur $\left[\ln(3);+\infty\right[$, une solution. La droite (D) coupe la courbe représentative de la fonction exponentielle en un point sur $\left[\ln(3);+\infty\right[$.

La droite (D) coupe donc la courbe représentative de la fonction exponentielle en deux points, l'un a son abscisse α dans $\left]-\infty;\ln(3)\right]$, l'autre a son abscisse β dans $\left[\ln(3);+\infty\right[$.

3. Pour déterminer la position relative de (D) et la courbe représentative de la fonction exponentielle, il suffit d'étudier le signe de $f(x)$. En utilisant le sens de variation de f et ce qui vient d'être dit, on peut écrire :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc la représentation graphique de la fonction exponentielle est au-dessus de la droite (D) sur $\left]-\infty;\alpha\right[$ et sur $\left]\beta;+\infty\right[$, en dessous de la droite (D) sur $\left]\alpha;\beta\right[$. Les points d'intersection sont les points $A\left(\beta, 3\beta+2\right)$ et $B\left(\alpha, 3\alpha+2\right)$.



Position relative des deux courbes

✓ ***Par rapport à une asymptote***

Exercice 77.

On pose, pour tout réel x, $f(x) = x + 1 + e^{-3x}$. Soit C_f la courbe représentative de f.

1. Montrer que C_f admet la droite (D) d'équation $y = x + 1$ comme asymptote oblique.
2. Étudier la position relative de C_f et (D).

Solution

1. Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = e^{-3x}$ donc $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -3x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-3x} = +\infty$

Ainsi la droite (D) n'est pas une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} -3x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0$.

Ainsi, $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

La droite (D) est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

2. *Position relative de* C_f *et* (D).

Pour cela, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x)-x-1$.
Cette différence est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc C_f est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 78.

On pose, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{(x+1)e^x+5}{e^x}$. Soit C_f la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Montrer que C_f admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$?

3. Étudier la position relative de C_f et (D).

Solution

1. *Limite en* $+\infty$. $f(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{e^x}+\dfrac{5}{e^x}=x+1+\dfrac{5}{e^x}$.

comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

Limite en $-\infty$. $f(x)=\left(xe^x+e^x+5\right)\times\dfrac{1}{e^x}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x+e^x+5\right)=5$.

comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty$ on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$.

2. On pose $\varphi(x)=\dfrac{5}{e^x}$. On a $f(x)=x+1+\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ donc la droite (D) d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

3. Il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f(x)-(x+1)$. Pour tout réel x, on a : $f(x)-(x+1)=\varphi(x)=\dfrac{5}{e^x}$. Il est clair que cette différence est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc C_f est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 79.

On pose, pour tout réel x, $f(x)=5x-1+\dfrac{3e^x}{e^x+7}$ et C_f la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Montrer que C_f admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $-\infty$.

3. Montrer que C_f admet une asymptote oblique (D') au voisinage de $+\infty$.

4. Étudier la position relative de C_f et (D).

5. Étudier la position relative de C_f et (D').

Solution

1. *Limite en* $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{3X}{X+7} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x}{e^x+7} = 0$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} (5x-1) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

Limite en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{3X}{X+7} = 3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x}{e^x+7} = 3$. D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x-1) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. Pour tout réel x, on pose $\varphi_1(x) = \dfrac{3e^x}{e^x+7}$. On a $f(x) = 5x - 1 + \varphi_1(x)$ avec d'après 1, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_1(x) = 0$. Donc la droite (D) d'équation $y = 5x-1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

3. Pour tout réel x, $f(x) = 5x - 1 + \dfrac{3e^x}{e^x+7} = 5x + \dfrac{-(e^x+7)+3e^x}{e^x+7}$.

$f(x) = 5x + \dfrac{2e^x-7}{e^x-7} = 5x + \dfrac{2(e^x+7)-21}{e^x+7} = 5x + 2 + \dfrac{-21}{e^x+7}$.

On pose $\varphi_2(x) = \dfrac{-21}{e^x+7}$. Il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-21}{e^x+7} = 0$ donc $f(x) = 5x + 2 + \varphi_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_2(x) = 0$. La droite (D') d'équation $y = 5x+2$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

4. *Position relative de* C_f *et* (D).

La position relative de C_f et (D) revient à étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de la différence $f(x) - (5x-1) = \dfrac{3e^x}{e^x+7} = \varphi_1(x)$. Comme $\varphi_1(x) > 0$, C_f est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la position relative de C_f et (D') revient à étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de la différence $f(x)-(5x+2)=\dfrac{-21}{e^x+7}=\varphi_2(x)$. Comme $\varphi_2(x)<0$, C_f est en dessous de (D) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 80.

On pose, pour tout réel x, $f(x)=-2x+3+xe^x$ et C_f la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que C_f admet une asymptote oblique (D).
3. Étudier la position relative de C_f et (D) et donner les coordonnées des éventuels points d'intersection.

Solution

1. *Limite en* $+\infty$. Pour tout réel x non nul, on a

$f(x)=x\left(e^x-2+\dfrac{3}{x}\right)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

Limite en $-\infty$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ (cours) et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+3)=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$.

2. Pour tout réel x, on pose $\varphi(x)=xe^x$.

On a : $f(x)=-2x+3+\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$, donc la droite (D) d'équation $y=-2x+3$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

Remarque : supposons que C_f admette une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$. Le coefficient directeur a de l'asymptote est donné par la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. En effet $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ donc $\dfrac{f(x)}{x}=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\varphi(x)}{x}$ et, en passant à la limite, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$. Or ici $\dfrac{f(x)}{x}=e^x-2+\dfrac{3}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Finalement C_f n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$. (On dit que

C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées).

3. Déterminer la position relative de C_f et (D) revient à étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de la différence $f(x)-(-2x+3)=xe^x=\varphi(x)$. Le signe de $\varphi(x)$ est celui de x donc :

- Sur $\left]-\infty;0\right[$, C_f est en dessous de (D).
- Sur $\left]0;+\infty\right[$, C_f est au dessus de (D).
- C_f et (D) se coupent au point d'abscisse 0 et d'ordonnée 3.

VI. *Suites et exponentielles*

Exercice 81.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour $n\geq 1$.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a : $1+x\leq e^x$.

En déduire si $n\geq 1$ alors $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leq e$.

2. En posant $X=-x$ montrer que si $X<1$ alors $e^X\leq\dfrac{1}{1-X}$.

En déduire que si $n\geq 1$ alors $e\leq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

3. En déduire que si $n\geq 1$ alors $0\leq e-u_n\leq\dfrac{3}{n}$.

4. En conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

Solution

1. D'après l'exercice 74, pour tout réel x , $1+x\leq e^x$.

En posant $x=\dfrac{1}{n}$, on a : si $n\geq 1$ alors $1+\dfrac{1}{n}\leq e^{\frac{1}{n}}$ donc, la fonction $x\mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ étant croissante sur $\left[0;+\infty\right[$, $\boxed{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leq e}$.

2. On pose $X=-x$.

Si $X<1$ alors $0<1-X<e^{-X}$ donc $e^X\leq\dfrac{1}{1-X}$.

$X=\dfrac{1}{n+1}$ donne $\dfrac{1}{1-X}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}}=\dfrac{1}{\dfrac{n}{n+1}}=\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}$ et

$e^X = e^{\frac{1}{n+1}}$. En utilisant la question précédente, on obtient : $e^{\frac{1}{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$ soit $\boxed{e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}$.

3. D'après les questions 1 et 2 , pour tout $n \geq 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ donc $0 \leq e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n}$.

$0 \leq e - {u_n}^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n} \leq \frac{e}{n} \leq \frac{3}{n}$.

Si $n \geq 1$ alors $\boxed{0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n}}$.

4. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (e - u_n) = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e}$.

Exercice 82.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + e^{-1} + e^{-2} + \ldots + e^{-n}$.
Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution

La suite de terme général e^{-n} est une suite géométrique de raison $e^{-1} = \frac{1}{e}$. On a donc : $\boxed{S_n = \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}}$.

Comme $2 < e < 3$ on a $0 < e^{-1} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$.

$e^{-(n+1)} = e^{-1} \times e^{-n}$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-(n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{e}{e-1}}.$$

VII. *Primitives et exponentielle*

Exercice 83.

Trouver une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{x^2+5} + 2$.

Solution

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur

$\mathbb{R}$. On pose $u(x) = x^2 + 5$ donc $u'(x) = 2x$ et $f(x) = u'(x)e^{u(x)} + 2$.

La fonction F définie pour tout réel x par $\boxed{F(x) = e^{x^2+5} + 2x}$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 84.

Trouver une primitive de f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}+1}$.

Solution

La fonction f est continue sur $\left]0;+\infty\right[$, elle admet donc des primitives sur $\left]0;+\infty\right[$. Pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$ on pose $u(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ donc $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $f(x) = -u'(x)e^{u(x)}$. La fonction F définie par $\boxed{F(x) = -e^{\frac{1}{x}+1}}$ est une primitive de la fonction f sur $\left]0;+\infty\right[$.

Exercice 85.

Trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{7x} + 5e^x + 1}{e^x}$$

Solution

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. On a : $f(x) = \dfrac{e^{7x}}{e^x} + \dfrac{5e^x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x} = e^{6x} + 5 + e^{-x}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{6x}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{6}e^{6x}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est la fonction $x \mapsto -e^{-x}$.

Donc la fonction F définie par $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{6}e^{6x} - e^{-x} + 5x}$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 86.

Trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{3x-1} - e^{x-1} + 5}{e^{3x}}$$

Solution

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur

$\mathbb{R}$. On a : $f(x) = \dfrac{e^{3x-1}}{e^{3x}} - \dfrac{e^{x-1}}{e^{3x}} + \dfrac{5}{e^{3x}} = e^{-1} - e^{-2x-1} + 5e^{-3x}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{-2x-1}$ est la fonction

$$x \longmapsto -\frac{1}{2}e^{-2x-1}.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 5e^{-3x}$ est la fonction

$$x \longmapsto -\frac{5}{3}e^{-3x}.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{-1}$ est la fonction

$$x \longmapsto e^{-1} \times x = \frac{x}{e}.$$

Donc la fonction F définie par $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}e^{-2x-1} - \frac{5}{3}e^{-3x} + \frac{x}{e}}$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 87.

Trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 5}.$$

Solution

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose $u(x) = e^x + 5$. On a $u(x) > 0$ et $u'(x) = e^x$. Comme $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, la fonction F définie par $\boxed{F(x) = \ln(e^x + 5)}$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 88.

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$ dans les deux cas suivants :

$$f : x \mapsto e^{3-x} \text{ et } f : x \mapsto \sqrt{e^x}.$$

Solution

- f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = 3 - x$. On a $u'(x) = -1$ et $f(x) = -u'(x)e^{u(x)}$ donc une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$\boxed{F(x) = -e^{u(x)} = -e^{3-x}}.$$

- $f(x) = \sqrt{e^x} = (e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{x}{2}}$. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = \frac{x}{2}$. On a $u'(x) = \frac{1}{2}$ et $f(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$ donc une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = 2e^{u(x)} = 2e^{\frac{x}{2}}$ soit

$$\boxed{F(x) = 2\sqrt{e^x}}.$$

Exercice 89.

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \left(5x^4 - 2\right)e^{x^5 - 2x + 7}, \quad f(x) = 5x^2 e^{2x^3 + 4}, \quad f(x) = \frac{5e^x}{7e^x + 3}$$

Solution

- f est continue sur $\mathbb{R}$, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = x^5 - 2x + 7$. On a $u'(x) = 5x^4 - 2$ et $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
Une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$\boxed{F(x) = e^{x^5 - 2x + 7}}.$$

- f est continue sur $\mathbb{R}$, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = 2x^3 + 4$. On a $u'(x) = 6x^2$ et $f(x) = \frac{5}{6}u'(x)e^{u(x)}$ donc une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$\boxed{F(x) = \frac{5}{6}e^{2x^3 + 4}}.$$

- f est continue sur $\mathbb{R}$, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = 7e^x + 3$. On a, pour tout réel x, $u(x) > 0$ et $u'(x) = 7e^x$. Or $f(x) = \frac{5}{7} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$\boxed{F(x) = \frac{5}{7}\ln\left(7e^x + 3\right)}.$$

*Exercice 90.**

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

Solution

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On a $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

On pose $u(x)=e^x+1$. On a, pour tout réel x, $u(x)>0$ et $u'(x)=e^x$.

Ainsi $f(x)=1-\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $\boxed{F(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)}$.

VIII. Équations différentielles

On rappelle que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ky$ sont les fonctions $x\mapsto Ce^{kx}$ où C est une constante réelle.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay+b$ $(a\neq 0)$ sont les fonctions $x\mapsto Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$ où C est une constante réelle.

Exercice 91.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'+3y=0 \text{ et } 2y'-5y=4.$$

Solution

- $(y'+3y=0)\Leftrightarrow(y'=-3y)$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=\lambda e^{-3x}}$ où λ est un réel quelconque.
- $(2y'-5y=4)\Leftrightarrow\left(y'=\dfrac{5}{2}y+2\right)$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=\lambda e^{\frac{5}{2}x}-\dfrac{4}{5}}$ où λ est un réel quelconque.

Exercice 92.

Résoudre l'équation différentielle $y'=2y+3$ avec la condition initiale $y(0)=2$.

Solution

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = \lambda e^{2x} - \frac{3}{2}}$ où λ est un réel quelconque. La condition initiale donne $f(0) = 2$ donc $\lambda e^{0} - \frac{3}{2} = 2$ soit $\lambda = \frac{7}{2}$. L'unique solution est donc $\boxed{f(x) = \frac{7}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}}$.

Exercice 93.

Soit (E) l'équation $y' + 3y = 4x + 1$

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est une solution de (E), alors la fonction f' est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 3y = 4$.

2. Résoudre l'équation différentielle (E_1) et en déduire que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{4}{3}x - \frac{1}{9} + Ce^{-3x}$ où C est une constante réelle.

3. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Solution

1. Soit f une solution de (E).

Pour tout réel x, $f'(x) = -3f(x) + 4x + 1$ et comme les fonctions $x \mapsto -3f(x)$ et $x \mapsto 4x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) + 3f'(x) = 4$. La fonction f' est donc solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 3y = 4$.

2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) : $y' + 3y = 4$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{-3x} + \frac{4}{3}$ où A est une constante réelle.

- Si f est une solution de (E) alors f' est une solution de (E_1) donc il existe un réel A tel que $f'(x) = Ae^{-3x} + \frac{4}{3}$. Donc $f(x) = -\frac{A}{3}e^{-3x} + \frac{4}{3}x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Comme f est solution de (E) ; $f'(x) + 3f(x) = 4x + 1$ donc $\frac{4}{3} + 3K = 1$ d'où $K = -\frac{1}{9}$. En posant $C = -\frac{A}{3}$, on a :

$f(x)=\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}+Ce^{-3x}$.

- Étudions la réciproque. On pose, pour tout réel x, $f(x)=\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}+Ce^{-3x}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

On a alors $f'(x)+3f(x)=-3Ce^{-3x}+\frac{4}{3}+3Ce^{-3x}+4x-\frac{1}{3}=4x+1$.

donc f est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $\boxed{x\mapsto\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}+Ce^{-3x}}$ où C est une constante réelle.

3. Soit f une solution de (E) telle que $f(0)=1$, alors il existe un réel C tel que $f(x)=\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}+Ce^{-3x}$.

$(f(0)=1)\Leftrightarrow\left(C-\frac{1}{9}=1\right)\Leftrightarrow\left(C=\frac{10}{9}\right)$. La solution de (E) telle que $f(0)=1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}+\frac{10}{9}e^{-3x}}$.

Exercice 94.

On considère l'équation différentielle : $y'+4y=3e^{-5x}$ (E).

1. Déterminer le réel λ tel que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\lambda e^{-5x}$ soit solution de (E).

2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f-g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'+4y=0$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E').

4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. Pour tout réel x, $g(x)=\lambda e^{-5x}$. g est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $g'(x)+4g(x)=3e^{-5x}$.

Or $g'(x)+4g(x)=-5\lambda e^{-5x}+4\lambda e^{-5x}=-\lambda e^{-5x}$ donc $\lambda=-3$.

Ainsi la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{g(x)=-3e^{-5x}}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2. Nous avons les équivalences suivantes :

$\left(f \text{ solution de } (E)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 4f(x) = g'(x) + 4g(x)\ \right)$.

$\left(f \text{ solution de } (E)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - g'(x) + 4f(x) - 4g(x) = 0\right)$.

$\left(f \text{ solution de } (E)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ (f-g)'(x) + 4(f-g)(x) = 0\right)$.

$\left(f \text{ solution de } (E)\right) \Leftrightarrow \left(f - g \text{ solution de } (E')\right)$.

3. On a (E') $y' = -4y$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E') sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-4x}$ où C est une constante réelle.

4. D'après les questions 2 et 3, f est solution de (E) si, et seulement si, $f(x) - g(x) = Ce^{-4x}$ donc $f(x) = -3e^{-5x} + Ce^{-4x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $\boxed{x \mapsto -3e^{-5x} + Ce^{-4x}}$ où C est une constante réelle.

Exercice 95.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ (E).

2. Déterminer un polynôme du second degré P solution de l'équation différentielle : $y' - 3y = 3x^2 - 2x$ (E').

3. Démontrer que les solutions de (E') sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{3x} - x^2$, où k est un réel donné quelconque.

4. Soit (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k qui passe par le point $A(1, -2)$. Déterminer une équation de la courbe (C_k).

Solution

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $\boxed{x \mapsto Ce^{3x}}$ où C est une constante réelle.

2. Soit P un polynôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels, $a \neq 0$. On a $P'(x) = 2ax + b$. P est solution de (E') si, et seulement si, pour tout réel x, $P'(x) - 3P(x) = 3x^2 - 2x$.

$P'(x) - 3P(x) = -3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c$ donc il suffit de prendre

$$\begin{cases} -3a = 3 \\ 2a - 3b = -2 \\ b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$ $\boxed{P(x) = -x^2}$ est une solution de (E').

3. $\left(f \text{ solution de } (E')\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 3f(x) = P'(x) - 3P(x)\ \right)$.

$\left(f \text{ solution de } (E')\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\, (f-P)'(x) - 3(f-P)(x) = 0\right)$.

$\left(f \text{ solution de } (E)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\, (f-P)(x) = ke^{3x}\right)$.

Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{3x} - x^2$.

4. La courbe passe par le point de coordonnées $(1,-2)$ donc il existe un réel k tel que $f(x) = ke^{3x} - x^2$ et $f(1) = -2$.

$\left(ke^3 - 1 = -2\right) \Leftrightarrow \left(ke^3 = -1\right) \Leftrightarrow \left(k = -e^{-3}\right)$.

$f(x) = -e^{3x-3} - x^2$. Une équation de la courbe est $\boxed{y = -e^{3x-3} - x^2}$.

Exercice 96.

On considère l'équation différentielle $y'' - 7y' = 0$ (E).

1. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $F = f'$ est solution de $y' - 7y = 0$ (E_1).
2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer un polynôme P du troisième degré tel que : $P(0) = 0$ et P solution de l'équation différentielle $y'' - 7y' = x^2 + 1$ (E').
4. Montrer que f est solution de (E') si, et seulement si, $f - P$ est solution de (E).
5. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E').
6. Déterminer la solution de (E') vérifiant : $f(0) = 2$ et $f'(0) = \dfrac{2350}{343}$

Solution

1. $\left(f \text{ solution de } (E)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\, f''(x) - 7f'(x) = 0\right)$.

$\left(f \text{ solution de } (E)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\, F'(x) - 7F(x) = 0\right)$.

$\left(f \text{ solution de } (E)\right) \Leftrightarrow \left(F \text{ solution de } (E_1)\right)$.

2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{7x}$ où C est un réel quelconque. D'après la question 1, les solutions de (E) sont les primitives des fonctions solutions de (E_1). Si C est un réel quelconque, alors $A = \dfrac{C}{7}$ est aussi un réel quelconque. Les solutions de (E_1) sont

donc les fonctions $\boxed{x \mapsto 7Ae^{7x}}$ où A est un réel quelconque. Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto Ae^{7x} + B$ où A et B sont deux constantes réelles.

3. Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels, $(a \neq 0)$. Comme $P(0) = 0$ on a $d = 0$.

Pour tout réel x, $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $P''(x) = 6ax + 2b$.

Comme P est solution de (E') pour tout réel x, on a :

$\left(P''(x) - 7P'(x) = x^2 + 1\right) \Leftrightarrow \left(6ax + 2b - 7\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = x^2 + 1\right)$.

$\left(P''(x) - 7P'(x) = x^2 + 1\right) \Leftrightarrow \left(-21ax^2 + (6a - 14b)x + 2b - 7c = x^2 + 1\right)$.

Pour déterminer le polynôme P, il suffit de prendre :

$$\begin{cases} -21a = 1 \\ 6a - 14b = 0 \\ 2b - 7c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{21} \\ b = \dfrac{3}{7}a = -\dfrac{1}{49} \\ c = \dfrac{2b - 1}{7} = -\dfrac{51}{343} \end{cases} . \quad \boxed{P(x) = -\frac{1}{21}x^3 - \frac{1}{49}x^2 - \frac{51}{343}x}.$$

4. On a les équivalences suivantes :

$\left(f \text{ solution de } (E')\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 7f'(x) = P''(x) - 7P'(x)\right)$.

$\left(f \text{ solution de } (E')\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - P''(x) - 7f'(x) + 7P'(x) = 0\right)$.

$\left(f \text{ solution de } (E')\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ (f - P)''(x) - 7(f - P)'(x) = 0\right)$.

$\left(f \text{ solution de } (E')\right) \Leftrightarrow \left(f - P \text{ solution de } (E)\right)$.

5. D'après les questions 2 et 4, $f - P$ est une solution de (E') si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x) - P(x) = Ae^{7x} + B$ où A et B sont deux constantes réelles. Finalement les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x) = Ae^{7x} - \frac{1}{21}x^3 - \frac{1}{49}x^2 - \frac{51}{343}x + B}.$$

6. Soit f une solution de (E'). Il existe deux réels A et B tels que, pour tout réel x, $f(x) = Ae^{7x} - \dfrac{1}{21}x^3 - \dfrac{1}{49}x^2 - \dfrac{51}{343}x + B$.

$$f'(x) = 7Ae^{7x} - \frac{1}{7}x^2 - \frac{2}{49}x - \frac{51}{343}.$$

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ f'(0)=\dfrac{2350}{343} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 7A-\dfrac{51}{343}=\dfrac{2350}{343} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7A=\dfrac{2401}{343} \\ A+B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{2401}{2401}=1 \\ B=1 \end{cases}.$$

La solution de (E') telle que $f(0)=1$ et $f'(0)=\dfrac{2350}{343}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=e^{7x}-\dfrac{1}{21}x^3-\dfrac{1}{49}x^2-\dfrac{51}{343}x+1}$.

Exercice 97.

On considère l'équation différentielle $y''+5y'=0$ (E).

1. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $F=f'$ est solution de $y'+5y=0$ (E_1).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).

3. Pour tout réel x, on pose $g(x)=a\cos(x)+b\sin(x)$ où a et b sont des réels. Déterminer des réels a et b tels que g vérifie l'équation différentielle $y''+5y=26\cos(x)$ (E').

4. Montrer que f est solution de (E') si, et seulement si, $f-g$ est solution de (E).

5. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E').

6. Déterminer la solution de (E') vérifiant $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.

Solution

1. On pose $F=f'$.

$(f \text{ solution de } (E)) \Leftrightarrow \left(\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+5f'(x)=0\right)$.

$(f \text{ solution de } (E)) \Leftrightarrow \left(\forall x\in\mathbb{R},\ F'(x)+5F(x)=0\right)$.

$(f \text{ solution de } (E)) \Leftrightarrow \left(F \text{ solution de } (E_1)\right)$.

2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) sont les fonctions $x\mapsto Ce^{-5x}$ où C est un réel quelconque. D'après la question 1, les solutions de (E) sont les primitives des fonctions solutions de (E_1). Si C est un réel quelconque, alors $A=-\dfrac{C}{5}$ est aussi un réel quelconque. Les solutions de (E_1) sont donc les fonctions $x\mapsto -5Ae^{-5x}$ où A est un réel quelconque. Les solutions de (E) sont donc les fonctions $\boxed{x\mapsto Ae^{-5x}+B}$ où A et B sont deux constantes réelles.

3. Pour tout réel x, $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$,

$g'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ et $g''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x)$.

g est une solution de (E') si, et seulement si, pour tout réel x, on a :

$g''(x) + 5g'(x) = 26\cos(x) \Leftrightarrow (5b-a)\cos(x) - (b+5a)\sin(x) = 26\cos(x)$

Donc il suffit de prendre $\begin{cases} 5b - a = 26 \\ b + 5a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5b - 26 \\ 26b - 5\times 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}$.

Finalement, $\boxed{g(x) = -\cos(x) + 5\sin(x)}$.

4. On a les équivalences suivantes :

$\big(f \text{ solution de } (E')\big) \Leftrightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 5f'(x) = g''(x) + 5g'(x)\big)$.

$\big(f \text{ solution de } (E')\big) \Leftrightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - g''(x) + 5f'(x) - 5g'(x) = 0\big)$.

$\big(f \text{ solution de } (E')\big) \Leftrightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R},\ (f-g)''(x) + 5(f-g)'(x) = 0\big)$.

$\big(f \text{ solution de } (E')\big) \Leftrightarrow \big(f - g \text{ solution de } (E)\big)$.

5. D'après les questions 2 et 4, $f-g$ est une solution de (E) si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = Ae^{-5x} + B$ où A et B sont deux constantes réelles. Finalement les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = Ae^{-5x} + B - \cos(x) + 5\sin(x)}$.

6. Soit f une solution de (E'). Il existe deux réels A et B tels que, pour tout réel x, on a : $f(x) = Ae^{-5x} + B - \cos(x) + 5\sin(x)$.

On a : $f'(x) = -5Ae^{-5x} + \sin(x) + 5\cos(x)$.

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B - 1 = 0 \\ 5 - 5A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}.$$

La solution de (E') telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = e^{-5x} - \cos(x) + 5\sin(x)}$.

IX. *Symétrie*

✓ *Axe de symétrie*

Exercice 98.

On considère la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{x^2-4x-5}$.
On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Calculer la dérivée de f. Étudier les variations de la fonction f.
3. Montrer que la droite (D) d'équation $x=-2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f.

Solution

1. Pour tout réel x non nul, $x^2+4x-5=x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+4x-5\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+4x-5\right)=+\infty$.

De plus $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x)=x^2+4x-5$.

$u'(x)=2x+4$ et $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$ donc $\boxed{f'(x)=2(x+2)e^{x^2+4x-5}}$.

$f'(x)$ est du signe de $2x+4$. On en déduit :

- $\left(f'(x)=0\right)\Leftrightarrow(x=-2)$.
- $\left(f'(x)<0\right)\Leftrightarrow(x<-2)$.
- $\left(f'(x)>0\right)\Leftrightarrow(x>-2)$.

f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-2\right]$ et f est strictement croissante sur $\left[-2;+\infty\right[$.

3. *Méthode du changement de repère.*

On effectue un changement de repère en prenant $\Omega(-2,0)$ pour nouvelle origine. On appelle (x,y) les coordonnées de M dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$.

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$.

Pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$. En égalisant les coordonnées des vecteurs, on obtient les formules de changement de repère $\begin{cases}x=X-2\\y=Y\end{cases}$. $\left(M(x,y)\in C_f\right)\Leftrightarrow\left(x\in\mathbb{R}\text{ et }f(x)=y\right)$.

$\left(M(x,y)\in C_f\right)\Leftrightarrow\left(X\in\mathbb{R}\text{ et }f(X-2)=Y\right)$.

$\left(M\left(x,y\right)\in C_f\right)\Leftrightarrow\left(X\in\mathbb{R}\text{ et }Y=e^{X^2-9}\right)$.

On pose $g(x)=e^{x^2-9}$. L'ensemble de définition de g est $D_g=\mathbb{R}$ qui est centré en 0 (si $x\in D_g$ alors $-x\in D_g$). D'autre part, pour tout réel x, $g(-x)=e^{(-x)^2-9}=e^{x^2-9}=g(x)$.

La représentation graphique de f dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est la représentation graphique de g dans $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$. Or la fonction g est paire, donc la représentation graphique admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Cet axe a pour équation $X=0$ dans $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ et pour équation $x=-2$ dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. La droite (D) d'équation $x=-2$ est l'axe de symétrie de C_f.

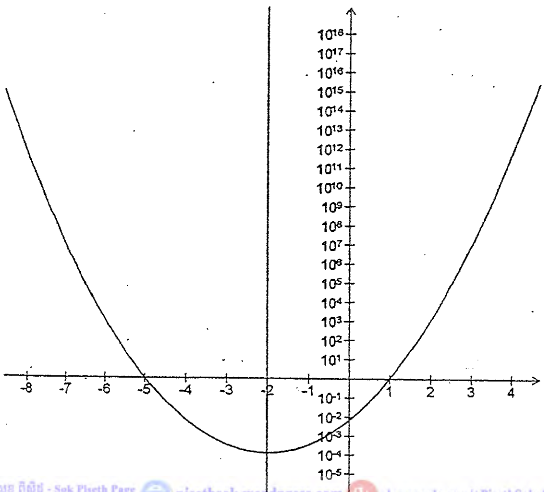
Méthode utilisant les formules.

Si, pour tout x appartenant à E_f (symétrique par rapport à a), $f(2a-x)=f(x)$ alors la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x=a$ comme axe de symétrie.

Pour tout réel x, $f\left(2\times(-2)-x\right)=e^{(-4-x)^2+4(-4-x)-5}=e^{x^2+4x-5}=f(x)$.

Autre formulation : Si, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, tel que $a+x$ appartienne à E_f (symétrique par rapport à a), $f(a+x)=f(a-x)$ alors la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x=a$ comme axe de symétrie.

Dans notre exercice, il suffit de montrer que, pour tout réel x, $f(-2-x)=f(-2+x)$.



✓ *Centre de symétrie*

Exercice 99.

On considère la fonction définie pour tout réel x non nul par $f(x)=\dfrac{2e^x+3}{e^x-1}$. On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Étudier les limites de f quand x tend vers 0 par valeurs supérieures puis par valeurs inférieures.

3. En déduire les asymptotes de C_f.

4. Calculer la dérivée de f. Étudier les variations de f.

5. Montrer que le point $\Omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe C_f.

Solution

1. *Limite en* $+\infty$. Pour tout x non nul, on a :

$$f(x)=\frac{e^x\left(2+\dfrac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=\frac{2+\dfrac{3}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}.$$ On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2}$.

Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{2X+3}{X-1}=-3$ (car la fonction $x\mapsto\dfrac{2x+3}{x-1}$ est continue en 0) donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3}$.

2. On a : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x-1\right)=0^+$ car si $x>0$ alors $e^x>1$.

De plus $\lim\limits_{x\to0^+}\left(2e^x+3\right)=5$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty}$.

$\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^x-1\right)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\left(2e^x+3\right)=5$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty}$.

3. *Asymptotes.*

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ donc C_f admet la droite (D) d'équation $y=2$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$ donc C_f admet la droite $\left(D'\right)$ d'équation $y=-3$ comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ donc C_f admet la droite (Δ) d'équation $x = 0$ comme asymptote.

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout réel non nul x,

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x-1)-(2e^x+3)e^x}{(e^x-1)^2} = \boxed{\frac{-5e^x}{(e^x-1)^2}}.$$

Pour tout réel non nul x, $f'(x) < 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;-\infty[$.

5. On effectue un changement de repère en prenant Ω pour nouvelle origine. Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$.

On appelle (x,y) les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Les formules de changement de repère sont $\begin{cases} x = X \\ y = -\frac{1}{2} + Y \end{cases}$.

$$\left(M(x,y) \in C_f\right) \Leftrightarrow \left(x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(x) = y\right).$$

$$\left(M(x,y) \in C_f\right) \Leftrightarrow \left(X \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(X) = -\frac{1}{2} + Y\right).$$

$$\left(M(x,y) \in C_f\right) \Leftrightarrow \left(X \in \mathbb{R}^* \text{ et } Y = \frac{5}{2} \times \frac{e^X+1}{e^X-1}\right).$$

Pour tout x non nul, on pose $g(x) = \frac{5(e^x+1)}{2(e^x-1)}$. L'ensemble de définition de g est $D_g = \mathbb{R}^*$ qui est centré en 0 (si $x \in D_g$ alors $-x \in D_g$). D'autre part, pour tout réel x,

$$g(-x) = \frac{5(e^{-x}+1)}{2(e^{-x}-1)} = \frac{5(e^{-x}+1)e^x}{2(e^{-x}-1)e^x} = -\frac{5(e^x+1)}{2(e^x-1)} = -g(x).$$

La représentation graphique de f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ est la représentation graphique de g dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$. Or la fonction g est impaire, donc la représentation graphique admet l'origine, Ω, comme centre de symétrie.

Méthode utilisant les formules.

Si, pour tout x appartenant à E_f (symétrique par rapport à a), $\dfrac{f(2a-x)+f(x)}{2}=b$ alors la courbe représentative de f admet le point $\Omega\left(a,b\right)$ comme centre de symétrie.

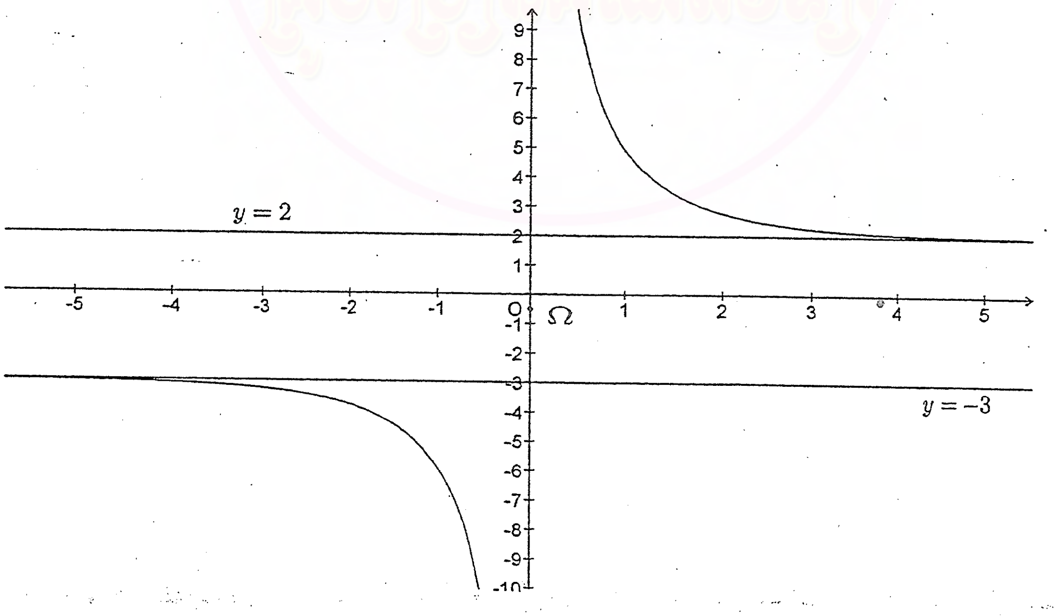
Autre formulation : si, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, tel que $a+x$ appartienne à E_f (symétrique par rapport à a), $\dfrac{f(a+x)+f(a-x)}{2}=b$ alors la courbe représentative de f admet le point $\Omega\left(a,b\right)$ comme centre de symétrie.

Pour tout réel non nul x, $\dfrac{f(2\times 0-x)+f(x)}{2}=\dfrac{\dfrac{2e^{-x}+3}{e^{-x}-1}+\dfrac{2e^{x}+3}{e^{x}-1}}{2}$ soit

$$\frac{f(2\times 0-x)+f(x)}{2}=\frac{-2+e^{-x}+e^{x}}{2\left(e^{x}-1\right)\left(e^{-x}-1\right)}.$$

$$\frac{f(2\times 0-x)+f(x)}{2}=\frac{-\left(e^{x}-1\right)\left(e^{-x}-1\right)}{2\left(e^{x}-1\right)\left(e^{-x}-1\right)}=-\frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\Omega\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie.



Courbe représentative de f et centre de symétrie

X. *Problèmes*

*Exercice 100.**

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in \left]0;+\infty\right[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\left]0;+\infty\right[$ puis démontrer que f est continue en 0.

2. Justifier la dérivabilité de la fonction f sur $\left]0;+\infty\right[$ puis démontrer que f est dérivable en 0.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $\left]0;+\infty\right[$.

5. Déterminer les variations de la fonction f.

Partie B

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(u) = 1-(1+u)e^{-u}$.

1. Calculer la dérivée de φ.

2. Prouver que, pour tout $u \geq 0$, $0 \leq \varphi'(u) \leq u$.

3. En déduire que, pour tout $u \geq 0$, $0 \leq \varphi(u) < \dfrac{u^2}{2}$ (1).

Partie C

1. A l'aide de (1), établir que, pour tout $x > 0$, $0 \leq x - f(x) \leq \dfrac{1}{2x}$.

2. En déduire que C admet une asymptote (Δ) en $+\infty$. Préciser la position relative de C et (Δ).

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 5$ sur $\left]0,+\infty\right[$. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chaque solution.

Partie D

Soit a un élément $\left]0;+\infty\right[$ et T_a la tangente à C au point d'abscisse a.

1. Déterminer une équation de T_a.
2. Montrer que T_a coupe l'axe des abscisses (Ox) au point B_a d'abscisse $\dfrac{a}{1+a+a^2}$.
3. Déterminer les coordonnées de B_1, $B_{\frac{1}{3}}$ et B_3.
4. Démontrer que pour tout $a>0$ on a $B_{\frac{1}{a}} = B_a$.

Partie E

Tracer C et (Δ). On précisera les tangentes à C aux points d'abscisses 0 et 1.

Solution

Partie A

1. Pour tout $x_0 \in \left]0;+\infty\right[$, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est continue en x_0 et la fonction $x \mapsto e^x$ est continue en $-\dfrac{1}{x_0}$ donc la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est continue en x_0 (composée de fonctions continues). La fonction $x \mapsto x+1$ est continue en x_0 donc la fonction $x \mapsto (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ c'est-à-dire f est continue en x_0 (produit de fonctions continues).

Finalement, la fonction f est continue sur $\left]0;+\infty\right[$.

Continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$ donc d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1$ on a $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} = 0$ soit $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

f est continue en 0.

2. Pour tout $x_0 \in \left]0;+\infty\right[$, la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est dérivable en x_0 (composée de fonctions dérivables) et la fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable en x_0 donc la fonction $x \mapsto (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ c'est-à-dire f est donc

dérivable en x_0 (produit de fonctions dérivables).

Finalement, la fonction f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$.

Dérivabilité en 0 : pour tout x strictement positif,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}=\frac{(x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x}=e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}-\left(-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\right).$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\right)=0$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

La fonction f est donc dérivable en 0 et $\boxed{f'(0)=0}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}e^X=1$ (car la fonction exponentielle est continue en 0) donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

4. Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f'(x)=1\times e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}\times(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$.

$$\boxed{f'(x)=\frac{\left(x^2+x+1\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}}.$$

5. Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $x^2+x+1>0$ donc $f'(x)>0$ et $f'(0)=0$. f est strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$.

Partie B

1. Pour tout $u\in\left[0;+\infty\right[$, $\varphi'(u)=-\left(1\times e^{-u}-1\times(u+1)\times e^{-u}\right)$.

$$\boxed{\varphi'(u)=ue^{-u}}.$$

2. Pour tout $u\in\left[0;+\infty\right[$, $-u\le 0$. Comme la fonction exponentielle est croissante $e^{-u}\le e^0$ c'est-à-dire $0\le e^{-u}\le 1$ donc $0\le ue^{-u}\le u$ soit

$$\boxed{0\le\varphi'(u)\le u}.$$

3. La fonction φ est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ $(ue^{-u}\ge 0)$. Comme $\varphi(0)=0$, pour tout $u\in\left[0;+\infty\right[$, $\boxed{0\le\varphi(u)}$. (on peut même dire que si $u>0$ alors $0<\varphi(u)$; cela servira dans la partie C).

On pose $g(u) = \varphi(u) - \dfrac{u^2}{2}$ pour tout $u \in \left[0 ; +\infty\right[$.

On a : $g'(u) = \varphi'(u) - u$. D'après la question 2, $\varphi'(u) - u \leq 0$ donc g est décroissante sur $\left[0 ; +\infty\right[$. Comme $g(0) = \varphi(0) - 0 = 0$, pour tout $u \in \left[0 ; +\infty\right[$, $g(u) \leq 0$ donc $\varphi(u) \leq \dfrac{u^2}{2}$.

Conclusion pour tout $u \in \left[0 ; +\infty\right[$, $\boxed{0 \leq \varphi(u) \leq \dfrac{u^2}{2}}$ (1).

Partie C

1. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} \in \left]0 ; +\infty\right[$ donc d'après l'encadrement (1),

$$0 \leq \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow 0 \leq x - (x+1) e^{-\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2x}$$

donc $\boxed{0 \leq x - f(x) \leq \dfrac{1}{2x}}$.

2. On pose, pour tout réel x, $\varepsilon(x) = f(x) - x$ donc $f(x) = x + \varepsilon(x)$ d'après l'inégalité précédente : $0 \leq -\varepsilon(x) \leq \dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2x} \leq \varepsilon(x) \leq 0$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe C.

Position relative de C et (Δ) : pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \varepsilon(x) < 0$. C est donc en dessous de (Δ) sur $\left[0, +\infty\right[$. C et (Δ) ont un point en commun, l'origine.

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[0 ; +\infty\right[$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc l'équation $f(x) = 5$ admet une seule solution. La calculatrice nous donne $f(5.08) \approx 4.993$ et $f(5.09) \approx 5.003$ donc si on désigne par α la solution de $f(x) = 5$, encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est $\boxed{5.08 < \alpha < 5.09}$.

Partie D

1. On a : $f(a) = (a+1) e^{-\frac{1}{a}}$ et $f'(a) = \dfrac{\left(a^2 + a + 1\right) e^{-\frac{1}{a}}}{a^2}$. Une équation de la tangente est donc $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$$y=(a+1)e^{-\frac{1}{a}}+\frac{\left(a^2+a+1\right)(x-a)}{a^2}e^{-\frac{1}{a}}\,.\quad \boxed{y=\frac{\left(a^2+a+1\right)e^{-\frac{1}{a}}}{a^2}x-\frac{e^{-\frac{1}{a}}}{a}}\,.$$

2. Intersection de T_a et l'axe des abscisses.

$$\left(\frac{\left(a^2+a+1\right)e^{-\frac{1}{a}}}{a^2}x-\frac{e^{-\frac{1}{a}}}{a}=0\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{a^2e^{-\frac{1}{a}}}{a\left(a^2+a+1\right)e^{-\frac{1}{a}}}=\frac{a}{a^2+a+1}\right).$$

$$\boxed{x=\frac{a}{a^2+a+1}}\,.$$

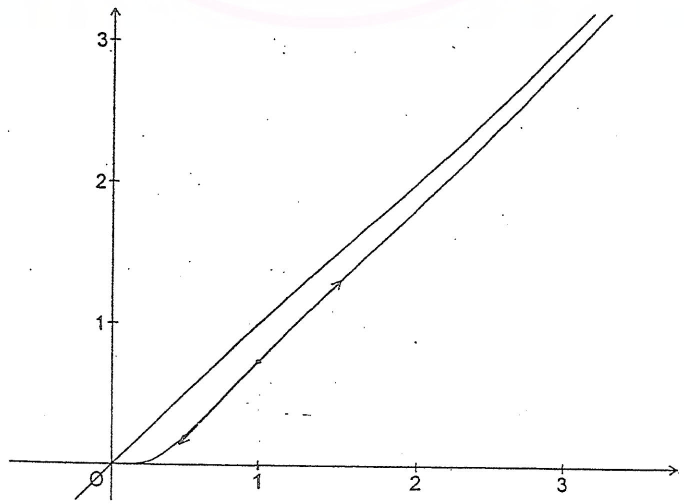
3. $B_1\left(\frac{1}{3};0\right)$, $B_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{13};0\right)$ et $B_3\left(\frac{3}{13};0\right)$.

4. Pour tout $a>0$, $\dfrac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}+1}=\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1+a+a^2}{a^2}}=\dfrac{a}{a^2+a+1}$

donc $\boxed{B_{\frac{1}{a}}=B_a}$.

Partie E

- Au point d'abscisse 0, la tangente est horizontale car $f'(0)=0$ et comme $f(0)=0$ son équation est $\boxed{y=0}$.
- Au point d'abscisse 1, une équation de la tangente est $\boxed{y=\frac{3}{e}x-\frac{1}{e}}$.



Courbe représentative de f, asymptote et tangente

Exercice 101.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + xe^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x\,.$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
4. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

Partie B

1. Montrer que la dérivée f' de f vérifie : pour tout réel x,
$$f'(x) = (x-1)(1-e^{-x}).$$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de la fonction f.
3. Dresser les tableaux de variation des fonctions f et g.
4. Tracer C_f et C_g.

Solution

Partie A

1. Pour tout réel x, on a $f(x) = xe^{-x}\left(\frac{1}{2}xe^{x} - e^{x} + 1\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}xe^{x} - e^{x} + 1\right) = 1$.
De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ (théorème sur la limite de la composée de deux fonctions) donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$. Finalement, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}.$$

2. $\frac{1}{2}x^2 - x = x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 - x - \left(-xe^{-x}\right)\right) = +\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

3. On a $h(x) = f(x) - g(x) = xe^{-x}$ et on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0}$.

Comme $f(x) = g(x) + h(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$, la courbe C_g est une courbe asymptote à la courbe C_f.

4. $f(x) - g(x) = h(x) = xe^{-x}$ et $h(x)$ est du signe de x, donc C_f est en dessous de C_g sur $\left]-\infty;0\right[$ et C_f est au dessus de C_g sur $\left]0;+\infty\right[$. Les deux courbes se coupent au point d'abscisse 0.

Partie B

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$f'(x) = x - 1 + e^x - xe^{-x} = (x-1) - e^{-x}(x-1) = \boxed{(x-1)\left(1-e^{-x}\right)}$.

2. On a $\left(1-e^{-x} > 0\right) \Leftrightarrow \left(1 > e^{-x}\right) \Leftrightarrow \left(e^x > 1\right) \Leftrightarrow (x > 0)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-e^x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f est strictement croissante sur $\left]-\infty;0\right]$ et sur $\left[1;+\infty\right[$.

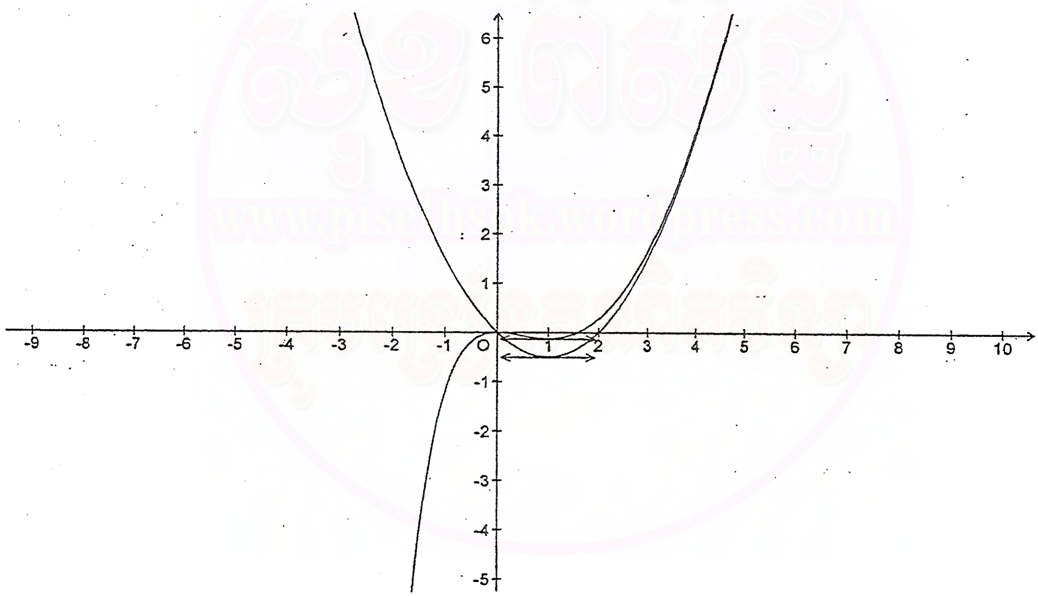
f est strictement décroissante sur $\left[0;1\right]$.

3. Pour la fonction g, on a : $g'(x) = x - 1$ donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On utilise le signe de $f'(x)$ déterminé dans question 2 de la partie B pour obtenir :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{1}{e}-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



Représentation graphique des fonctions f et g

Exercice 102.

Partie A

Soit φ la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $\varphi(u)=e^u-u^2$.

1. Déterminer les variations de φ sur $[1\,;+\infty[$ (on pourra dériver deux fois la fonction φ).

2. Déterminer le signe de φ.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=xe^{-x^2}$. On appelle C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Justifier la dérivabilité de f sur $[0;+\infty[$. Déterminer les variations de f sur $[0;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 0.

4. Déterminer les positions relatives de (T) et C_f.

5. Tracer dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, avec une unité graphique de 5 cm, la droite (T) et la courbe C_f.

Partie C

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=x^3e^{-x^2}$. On note C_g sa représentation graphique.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ (on pourra utiliser la partie A).

2. Déterminer les variations de g sur $[0;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de g.

3. Déterminer les positions relatives de C_g et C_f.

4. Tracer C_g dans le même repère que C_f.

Solution

Partie A

1. Pour tout u appartenant à $[1;+\infty[$, $\varphi'(u)=e^u-2u$ et $\varphi''(u)=e^u-2$.

$u\geq 1$ donc $e^u\geq e$ car la fonction exponentielle est croissante.

Ainsi $e^u-2\geq e-2>0$ et $\varphi''(u)>0$ donc φ' est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Ainsi si $u\geq 1$ alors $\varphi'(u)>\varphi'(1)$ et comme $\varphi'(1)=e-2>0$ on a $\varphi'(u)>0$ et donc φ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

2. Comme φ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ si $u \geq 1$ alors $\varphi(u) \geq \varphi(1)$ or $\varphi(1) = e - 1 > 0$ donc φ est positive sur $[1;+\infty[$.

Partie B

1. *Limite de f en $+\infty$* : pour tout $x \in [1;+\infty[$,

$\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \varphi(x^2) > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > x^4 \Leftrightarrow e^{-x^2} < \dfrac{1}{x^4} \Leftrightarrow xe^{-x^2} < \dfrac{1}{x^3}$.

Donc si $x \in [1;+\infty[$ alors $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^3}$. D'après le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Sans la partie A : pour tout $x > 0$, $f(x) = -\dfrac{1}{x}(-x^2)e^{-x^2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ donc (théorème sur la limite de la composée de deux fonctions) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2e^{-x^2}\right) = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

2. La fonction $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $[0;+\infty[$, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables et enfin $x \mapsto xe^{-x^2}$, c'est-à-dire f, est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$, donc $f'(x)$ est du signe de $(1-2x^2)$ car $e^{-x^2} > 0$.

$(1-2x^2 = 0) \Leftrightarrow \left(x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$1-2x^2$	1	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	

On en déduit que f est strictement croissante sur $\left[0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}$	$\searrow$	0

3. f est dérivable en 0, donc C_f admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.
Comme $f'(0)=1$ et $f(0)=0$ une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse $x=0$ est donc $\boxed{y=x}$.

4. La position relative des deux courbes s'obtient en étudiant le signe $f(x)-x$. Pour tout $x\in\left[0;+\infty\right[$, $f(x)-x = x\left(e^{-x^2}-1\right)$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $-x^2<0$ implique $e^{-x^2}<e^0$ donc pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f(x)-x<0$ et par conséquent C_f est en dessous de (T). (T) et C_f ont le point O en commun.

Partie C

1. On utilise la partie A. Pour tout $x\in\left[1;+\infty\right[$,

$$(\varphi(x)>0)\Leftrightarrow\left(\varphi\left(x^2\right)>0\right)\Leftrightarrow\left(e^{x^2}>x^4\right)\Leftrightarrow\left(e^{-x^2}<\frac{1}{x^4}\right)\Leftrightarrow\left(x^3e^{-x^2}<\frac{1}{x}\right).$$

Donc si $x\in\left[1;+\infty\right[$ alors $0\le g(x)\le\frac{1}{x}$. D'après le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0}$.

2. g est dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$.
Pour tout $x\in\left[0;+\infty\right[$, $g'(x)=3x^2e^{-x^2}-2x^4e^{-x^2}=x^2e^{-x^2}\left(3-2x^2\right)$.
$g'(x)$ est donc du signe de $\left(3-2x^2\right)$. Les racines du trinôme $\left(3-2x^2\right)$

sont : $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$3-2x^2$		$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que g est strictement croissante sur $\left[0;\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{3}{2}};+\infty\right[$.

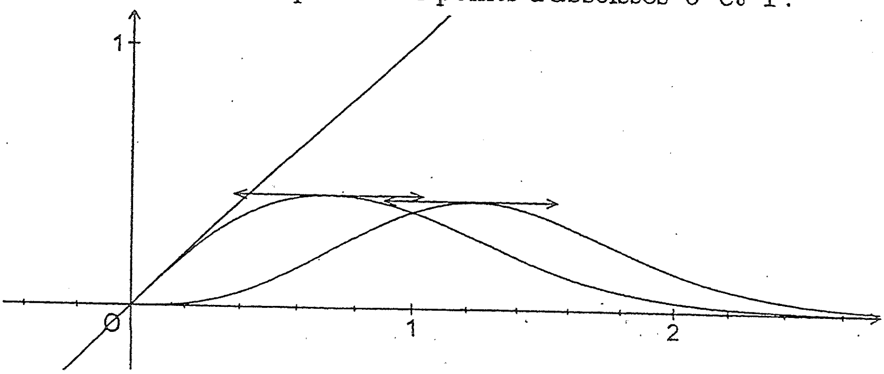
3. Pour déterminer la position relative des deux courbes, on peut étudier le signe de $f(x)-g(x)$.

Pour tout $x \in \left[0;+\infty\right[$, $f(x)-g(x) = xe^{-x^2} - x^3e^{-x^2} = x\left(1-x^2\right)e^{-x^2}$.

Le signe de $f(x)-g(x)$ est celui de $x\left(1-x^2\right)$.

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$1-x^2$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	0	$+$	0	$-$	

C_f est au dessus de C_g sur $\left]0;1\right[$, C_f est en dessous de C_g sur $\left]1;+\infty\right[$ et les deux courbes se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.



Représentations graphiques des fonctions f et g.

Exercice 103.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{2(1-x)}$. On appelle C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

1. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en 1. Interpréter graphiquement ces résultats.
2. Étudier la position relative de C_f et de la droite (Δ) d'équation $y=0$.
3. Étudier la limite de f en $-\infty$.
4. Étudier les variations de f. Préciser le minimum de f sur $]-\infty;1[$.
5. Dresser le tableau de variation de f. Tracer C_f.

Partie B

On considère l'équation $f(x)=1$.

1. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x)=1$ sur $\mathbb{R}$.
2. On appelle α la plus petite des solutions de l'équation $f(x)=1$, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.
3. On appelle β la plus grande des solutions de l'équation $f(x)=1$, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près par excès de β.
4. Montrer que $e^{\beta-\alpha}\times\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}=1$.

Solution

Partie A

1. *Limite en* $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ (théorème sur la limite de la composée de deux fonctions).

$\lim\limits_{x\to+\infty}2(1-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{1}{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2(1-x)}=0$.

Comme $f(x)=e^{-x}\times\dfrac{1}{2(1-x)}$ on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

L'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale à la courbe C_f

quand x tend vers $+\infty$.

Limite en 1 : la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue en 1, donc $\lim\limits_{x\to 1} e^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. $\lim\limits_{x\to 1^-} 2(1-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} 2(1-x) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2(1-x)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{2(1-x)} = -\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty}$. La droite d'équation $x = 1$ est donc une asymptote verticale à la courbe C_f.

2. La position relative de C_f et (Δ) est donnée par l'étude du signe de $f(x) - 0 = \dfrac{e^{-x}}{2(1-x)}$. Si $x < 1$ alors $\dfrac{e^{-x}}{2(1-x)} > 0$ et si $x > 1$ alors $\dfrac{e^{-x}}{2(1-x)} < 0$. Donc C_f est au dessus de l'axe des abscisses sur $]-\infty;1[$ et C_f est en dessous de l'axe des abscisses sur $]1;+\infty[$.

3. *Limite en $-\infty$* : pour tout réel x non nul et différent de 0, on a :
$f(x) = \dfrac{e^{-x}}{-x} \times \dfrac{-x}{2(1-x)}$. $\lim\limits_{x\to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x}{2(1-x)} = \dfrac{1}{2}$ on a $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty}$.

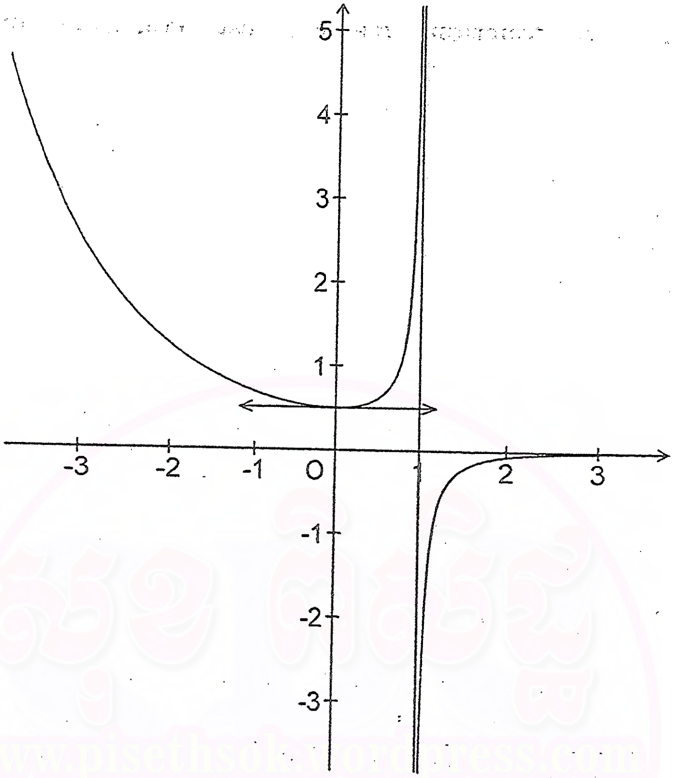
4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Pour tout $x \neq 1$, on a
$f'(x) = \dfrac{-2e^{-x}(1-x) + 2e^{-x}}{4(1-x)^2} = \boxed{\dfrac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}}$. $f'(x)$ est du signe de x.

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

Il y a donc un minimum en $x = 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$ $+\infty$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



Représentation graphique de f

Partie B

1. Comme $f(x) < 0$ si $x \in]1;+\infty[$ (partie A.2), l'équation $f(x) = 1$ ne peut avoir de solution sur $]1;+\infty[$. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

Comme $1 \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ l'équation $f(x) = 1$ admet une solution sur $]-\infty;0]$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1[$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ et $f(0) = \frac{1}{2}$. Comme $1 \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ l'équation $f(x) = 1$ admet une solution sur $[0;1[$.

L'équation $f(x) = 1$ admet donc deux solutions sur $\mathbb{R}$.

2. *Encadrement de* α : $\alpha \in]-\infty;0]$, on sait que α est la seule

solution sur $\left]-\infty;0\right]$. La calculatrice nous donne $f(-1.679) \approx 1.0004$ et $f(-1.678) \approx 0.99978$ donc $\boxed{-1.679 < \alpha < -1.678}$.

3. *Valeur approchée de* β : on sait que β est la seule solution sur $\left[0,1\right[$. La calculatrice nous donne $f(0.768) \approx 0.99987$ et $f(0.769) \approx 1.0032$ donc $0.768 < \beta < 0.769$ et $\boxed{\beta = 0.769}$ à 10^{-3} près par excès.

4. $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \dfrac{e^{-\alpha}}{2(1-\alpha)} \times \dfrac{2(1-\beta)}{e^{-\beta}} = e^{\beta-\alpha} \times \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}$.

Comme $f(\alpha) = f(\beta) = 1$ et $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)} = 1$, on a $\boxed{e^{\beta-\alpha} \times \dfrac{1-\beta}{1-\alpha} = 1}$.

Chapitre 4

La fonction logarithme

I. Calculs

✓ Somme, produit, différence et quotient

Exercice 1.

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les nombres réels suivants :

$$A = \frac{1}{2}\ln(32) \quad ; \quad B = \ln\left(\frac{1}{27}\right) \quad ;$$

$$C = \ln(72) - 3\ln(3) \quad ; \quad D = 5\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

Solution

- $A = \frac{1}{2}\ln(32) = \frac{1}{2}\ln\left(2^5\right) = \frac{5}{2}\ln(2)$. $\boxed{A = \frac{5}{2}\ln(2)}$.
- $B = \ln\left(\frac{1}{27}\right) = -\ln\left(3^3\right) = -3\ln(3)$. $\boxed{B = -3\ln(3)}$.
- $C = \ln(72) - 3\ln(3) = \ln\left(2^3 \times 3^2\right) - 3\ln(3)$.

$C = 3\ln(2) + 2\ln(3) - 3\ln(3) = 3\ln(2) - \ln(3)$. $\boxed{C = 3\ln(2) - \ln(3)}$.

- $D = 5\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = 5\left(\ln\left(\sqrt{3}\right) - \ln\left(\sqrt{2}\right)\right) = \frac{5}{2}(\ln(3) - \ln(2))$.

$$\boxed{D = \frac{5}{2}(\ln(3) - \ln(2))}.$$

Exercice 2.

Sans utiliser la calculatrice, calculer $A = \ln(216) - 3(\ln(2) + \ln(3))$.

Solution

$A = \ln(216) - 3\ln(6) = \ln(216) - \ln\left(6^3\right) = \ln(216) - \ln(216) = \boxed{0}$.

Exercice 3.

Simplifier l'écriture des réels suivants :

$A = \ln\left(e^3\right) - \ln\left(e^2\right)$; $B = \ln\left(e^2\sqrt{e}\right)$; $C = \ln(2) + \ln(8e) - \ln\left(4e^2\right)$

$D = \ln\left[\left(\frac{1}{e}\right)^2\right] - \ln^2\left(\frac{1}{e}\right)$.

Solution

$A = \ln\left(e^3\right) - \ln\left(e^2\right) = 3\ln(e) - 2\ln(e) = \ln(e) = 1$. $\boxed{A = 1}$.

$B = \ln\left(e^2\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 2\ln(e) + \frac{1}{2}\ln(e) = \frac{5}{2}\ln(e) = \frac{5}{2}$. $\boxed{B = \frac{5}{2}}$.

$C = \ln(2) + \ln(8) + \ln(e) - \ln(4) - \ln\left(e^2\right)$.

$C = \ln(2) + 3\ln(2) + 1 - 2\ln(2) - 2$. $\boxed{C = 2\ln(2) - 1}$.

$D = 2\ln\left(\frac{1}{e}\right) - [-\ln(e)]^2 = -2\ln(e) - (-1)^2 = -2 - 1 = -3$. $\boxed{D = -3}$.

Exercice 4.

Soit a un réel strictement négatif. Simplifier $\frac{1}{8}\ln\left(a^{32}\right)$.

Solution

$\frac{1}{8}\ln\left(a^{32}\right) = \frac{1}{8}\ln\left[\left(a^2\right)^{16}\right] = \frac{16}{8}\ln\left(a^2\right) = 2\ln\left(a^2\right)$. $\boxed{\frac{1}{8}\ln\left(a^{32}\right) = 2\ln\left(a^2\right)}$.

Remarque : on peut écrire $\frac{1}{8}\ln\left(a^{32}\right) = 4\ln(-a)$.

✓ Déterminer un ensemble de définition

Exercice 5.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \ln(2x - 1)$.

Solution

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. $\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow (2x-1>0) \Leftrightarrow \left(x > \dfrac{1}{2}\right)$.

L'ensemble de définition de f est $\boxed{E_f = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[}$.

Exercice 6.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \ln(x) + \ln(2-x).$$

Solution

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ et } 2-x>0\right) \Leftrightarrow \left(x>0 \text{ et } x<2\right) \Leftrightarrow (0<x<2)$.

L'ensemble de définition de f est $\boxed{E_f = \left]0;2\right[}$.

Exercice 7.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(\sin(x))$.

Solution

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow (\sin(x) > 0) \Leftrightarrow \left(x \in \left]2k\pi;(2k+1)\pi\right[\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble de définition est $\boxed{E_f = \left\{\left]2k\pi;(2k+1)\pi\right[\ , k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Exercice 8.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$.

Solution

$\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } \ln(x) > 0) \Leftrightarrow (x>1)$.

L'ensemble de définition de f est $\boxed{E_f = \left]1;+\infty\right[}$.

Exercice 9.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x))).$$

Solution

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ et } \ln(\ln(x)) > 0\right) \Leftrightarrow (\ln(x) > 1) \Leftrightarrow (x > e)$.

L'ensemble de définition de f est $\boxed{E_f = \left]e; +\infty\right[}$.

Exercice 10. *

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{\ln(x) - 1}{\ln(x) + 1}}.$$

Solution

La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. $\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ et } \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln(x) + 1} \geq 0\right)$.

Un quotient est positif si son numérateur et son dénominateur sont de même signe donc : $\left(\dfrac{\ln(x) - 1}{\ln(x) + 1} \geq 0\right)$

$\Leftrightarrow ((\ln(x) - 1 \geq 0 \text{ et } \ln(x) + 1 > 0) \text{ ou } (\ln(x) - 1 \leq 0 \text{ et } \ln(x) + 1 < 0))$

$\Leftrightarrow \left(\left(x \geq e \text{ et } x > \dfrac{1}{e}\right) \text{ ou } \left(0 < x \leq e \text{ et } 0 < x < \dfrac{1}{e}\right)\right)$.

$\Leftrightarrow \left(x \geq e \text{ ou } 0 < x < \dfrac{1}{e}\right)$.

L'ensemble de définition de f est $\boxed{E_f = \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left[e; +\infty\right[}$.

✓ *Résoudre une équation*

Exercice 11.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(1 + x) = \ln(1 - 2x)$ (1).

Solution

Si x est solution de l'équation (1) alors $1 + x = 1 - 2x$ et donc $x = 0$.

On vérifie que 0 est bien solution de (1).

$(\ln(1 + x) = \ln(1 - 2x)) \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$.

Exercice 12.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(3 + x) + \ln(x - 3) = \ln(5)$.

Solution

L'équation est définie si on a : $3 + x > 0$ et $x - 3 > 0$ c'est-à-dire si

$\left([\ln(\ln(x))]^2 = 16\right) \Leftrightarrow \left(\ln(\ln(x)) = -4 \text{ ou } \ln(\ln(x)) = 4\right)$.

$\left([\ln(\ln(x))]^2 = 16\right) \Leftrightarrow \left(\ln(x) = e^{-4} \text{ ou } \ln(x) = e^{4}\right)$.

$\left([\ln(\ln(x))]^2 = 16\right) \Leftrightarrow \left(x = e^{e^{-4}} \text{ ou } x = e^{e^{4}}\right)$.

Les quatre solutions étant supérieures à 1 , on a :

$(1) \Leftrightarrow \left(x = e^{e^{-4}} \text{ ou } x = e^{e^{-3}} \text{ ou } x = e^{e^{3}} \text{ ou } x = e^{e^{4}}\right)$.

L'ensemble S des solutions de (1) est donc :

$$\boxed{S = \left\{e^{e^{-4}} ; e^{e^{-3}} ; e^{e^{3}} ; e^{e^{4}}\right\}}.$$

✓ *Résoudre une inéquation*

Exercice 17.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln\left(-x^2 + 4x + 6\right) < 0$ (1).

Solution

L'ensemble de définition de cette inéquation est $\left]2 - \sqrt{10} ; 2 + \sqrt{10}\right[$.

$\left(\ln\left(-x^2 + 4x + 6\right) < 0\right) \Leftrightarrow \left(-x^2 + 4x + 6 < 1\right) \Leftrightarrow \left(-x^2 + 4x + 5 < 0\right)$.

Les racines du polynôme du second degré $-x^2 + 4x + 5$ sont -1 et 5 donc, $-x^2 + 4x + 5 < 0$ si, et seulement si, $x \in \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]5 ; +\infty\right[$.

L'ensemble S des solutions de (1) est donc :

$$\boxed{S = \left]2 - \sqrt{10} ; -1\right[\cup \left]5 ; 2 + \sqrt{10}\right[}.$$

Exercice 18.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(x) + \ln(2 - x) + \ln(x + 4) \geq \ln(5x)$ (1).

Solution

L'ensemble de définition de cette inéquation est $\left]0 ; 2\right[$.

$(1) \Leftrightarrow \left[\ln\left(\dfrac{x(2 - x)(x + 4)}{5x}\right) \geq 0 \text{ et } 0 < x < 2\right]$.

$(1) \Leftrightarrow \left[\ln\left(\dfrac{1}{5}(2 - x)(x + 4)\right) \geq 0 \text{ et } 0 < x < 2\right]$.

$(1) \Leftrightarrow \left[\dfrac{1}{5}(2 - x)(x + 4) \geq 1 \text{ et } 0 < x < 2\right]$.

$(1) \Leftrightarrow \left(-x^2-2x+3\geq 0 \text{ et } 0<x<2\right)$. Les racines du polynôme du second degré $-x^2-2x+3$ sont 1 et -3 donc $-x^2-2x+3\geq 0$ si, et seulement si, $x\in\left[-3;1\right]$. Les solutions de (1) ne peuvent être que dans $\left]0;2\right[$, donc $\left(\ln(x)+\ln(2-x)+\ln(x+4)\geq \ln(5x)\right) \Leftrightarrow \left(x\in\left]0;1\right]\right)$.

L'ensemble S des solutions de (1) est donc $\boxed{S=\left]0;1\right]}$.

Exercice 19.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln\left(x^2+9x+20\right)<\ln(x+13)$ (1).

Solution

L'ensemble de définition de cette inéquation est $\left]-13;-5\right[\cup\left]-4;+\infty\right[$.

$(1) \Leftrightarrow \left(x^2+9x+20<x+13\right) \Leftrightarrow \left(x^2+8x+7<0\right)$.

Les racines du polynôme du second degré x^2+8x+7 sont -1 et -7 donc $x^2+8x+7<0$ si, et seulement si, $x\in\left]-7;-1\right[$.

L'ensemble S des solutions de (1) est donc $\boxed{S=\left]-7;-5\right[\cup\left]-4;-1\right[}$.

Exercice 20.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(x)-\dfrac{1}{\ln(x)}>\dfrac{3}{2}$ (1).

Solution

L'ensemble de définition de l'inéquation est $\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

On pose $X=\ln(x)$ l'inéquation (1) s'écrit $X-\dfrac{1}{X}>\dfrac{3}{2}$.

$\left(X-\dfrac{1}{X}>\dfrac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{2X^2-3X-2}{2X}>0\right)$. On étudie le polynôme $2X^2-3X-2$. Son discriminant est $\Delta=25$, ses racines sont 2 et $-\dfrac{1}{2}$.

X	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		2		$+\infty$
$2X$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2X^2-3X-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$X-\frac{1}{X}-\frac{3}{2}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\left(X - \dfrac{1}{X} > \dfrac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(X \in \left]-\dfrac{1}{2};0\right[\cup \left]2;+\infty\right[\right)$. Comme $X = \ln(x)$.

$$\left(\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} > \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} < \ln(x) < 0 \text{ ou } 2 < \ln(x)\right).$$

$$\left(\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} > \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{e}} < x < 1 \text{ ou } e^2 < x\right).$$

$$\left(\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} > \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left]\frac{1}{\sqrt{e}};1\right[\cup \left]e^2;+\infty\right[\right).$$

L'ensemble S des solutions de (1) est donc $\boxed{S = \left]\dfrac{1}{\sqrt{e}};1\right[\cup \left]e^2;+\infty\right[}$.

*Exercice 21.***

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln\left(\left|\dfrac{x-3}{5x+1}\right|\right) - \ln(2) \geq 0 \quad (E)$.

Solution

L'expression $\left|\dfrac{x-3}{5x+1}\right|$ doit être un réel strictement positif donc $x \neq -\dfrac{1}{5}$ et $x \neq 3$. L'ensemble de validité de l'équation (E) est donc $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{5};3\right\}$.

- Suppression des valeurs absolues.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$		3	$+\infty$
$\dfrac{x-3}{5x+1}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$\ln\left(\left\|\dfrac{x-3}{5x+1}\right\|\right)$	$\ln\left(\dfrac{x-3}{5x+1}\right)$	$\Vert$	$\ln\left(\dfrac{3-x}{5x+1}\right)$	$\Vert$	$\ln\left(\dfrac{x-3}{5x+1}\right)$

On en déduit :

$$(E) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in \left]-\infty;-\dfrac{1}{5}\right[\cup \left]3;+\infty\right[\\ \ln\left(\dfrac{x-3}{5x+1}\right) - \ln(2) \geq 0 \quad (1) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \left]-\dfrac{1}{5};3\right[\\ \ln\left(\dfrac{3-x}{5x+1}\right) - \ln(2) \geq 0 \quad (2) \end{cases} \right).$$

- Résolution de (1) sachant que $x \in \left]-\infty;-\dfrac{1}{5}\right[\cup \left]3;+\infty\right[$.

— Si $x < -\dfrac{1}{5}$ alors $5x+1<0$ donc :

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{5x+1} \geq 2\right) \Leftrightarrow (x-3 \leq 10x+2) \Leftrightarrow (9x \geq -5) \Leftrightarrow \boxed{x \geq -\frac{5}{9}}.$$

On a : $-\dfrac{5}{9} < -\dfrac{1}{5}$ donc $x \in \left[-\dfrac{5}{9};-\dfrac{1}{5}\right[$.

— Si $x > 3$ alors $5x+1>0$ donc :

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{5x+1} \geq 2\right) \Leftrightarrow (x-3 \geq 10x+2) \Leftrightarrow (9x \leq -5) \Leftrightarrow \boxed{x \leq -\frac{5}{9}}.$$

Ainsi, l'inéquation (1) n'a pas de solution si $x > 3$.

L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x \in \left]-\infty;-\dfrac{1}{5}\right[\cup \left]3;+\infty\right[\\ \ln\left(\dfrac{x-3}{5x+1}\right) - \ln(2) \geq 0 \end{cases}$ est

donc $\boxed{S_1 = \left[-\dfrac{5}{9};-\dfrac{1}{5}\right[}$.

- Résolution de l'inéquation (2) sachant que $x \in \left]-\dfrac{1}{5};3\right[$.

Si $x \in \left]-\dfrac{1}{5};3\right[$ alors $5x+1>0$ donc :

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{3-x}{5x+1} \geq 2\right) \Leftrightarrow (3-x \geq 10x+2) \Leftrightarrow (11x \leq 1) \Leftrightarrow \boxed{x \leq \frac{1}{11}}.$$

La solution du système $\begin{cases} x \in \left]-\dfrac{1}{5};3\right[\\ \ln\left(\dfrac{3-x}{5x+1}\right) - \ln(2) \geq 0 \end{cases}$ est $\boxed{S_2 = \left]-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{11}\right]}$.

- Solution de l'inéquation (E).

L'ensemble solution de l'inéquation (E) est $S = S_1 \cup S_2$.

$$\boxed{S = \left[-\frac{5}{9};-\frac{1}{5}\right[\cup \left]-\frac{1}{5};\frac{1}{11}\right]}.$$

✓ *Résoudre un système d'équations*

Exercice 22.

Résoudre le système (Σ) $\begin{cases} x+y=65 \\ \ln(x)+\ln(y)=\ln(1000) \end{cases}$

Donc $\left(X-\dfrac{1}{X}>\dfrac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(X\in\left]-\dfrac{1}{2};0\right[\cup\left]2;+\infty\right[\right)$. Comme $X=\ln(x)$.

$$\left(\ln(x)-\frac{1}{\ln(x)}>\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2}<\ln(x)<0 \text{ ou } 2<\ln(x)\right).$$

$$\left(\ln(x)-\frac{1}{\ln(x)}>\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{e}}<x<1 \text{ ou } e^2<x\right).$$

$$\left(\ln(x)-\frac{1}{\ln(x)}>\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left]\frac{1}{\sqrt{e}};1\right[\cup\left]e^2;+\infty\right[\right).$$

L'ensemble S des solutions de (1) est donc $\boxed{S=\left]\frac{1}{\sqrt{e}};1\right[\cup\left]e^2;+\infty\right[}$.

*Exercice 21.***

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln\left(\left|\dfrac{x-3}{5x+1}\right|\right)-\ln(2)\geq 0\quad(E)$.

Solution

L'expression $\left|\dfrac{x-3}{5x+1}\right|$ doit être un réel strictement positif donc $x\neq-\dfrac{1}{5}$ et $x\neq 3$. L'ensemble de validité de l'équation (E) est donc $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{5};3\right\}$.

- Suppression des valeurs absolues.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$		3	$+\infty$
$\frac{x-3}{5x+1}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$\ln\left(\left\vert\frac{x-3}{5x+1}\right\vert\right)$	$\ln\left(\frac{x-3}{5x+1}\right)$	$\Vert$	$\ln\left(\frac{3-x}{5x+1}\right)$	$\Vert$	$\ln\left(\frac{x-3}{5x+1}\right)$

On en déduit :

$$(E)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\in\left]-\infty;-\frac{1}{5}\right[\cup\left]3;+\infty\right[\\ \ln\left(\frac{x-3}{5x+1}\right)-\ln(2)\geq 0\quad(1)\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}x\in\left]-\frac{1}{5};3\right[\\ \ln\left(\frac{3-x}{5x+1}\right)-\ln(2)\geq 0\quad(2)\end{cases}\right).$$

- Résolution de (1) sachant que $x\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{5}\right[\cup\left]3;+\infty\right[$.

— Si $x < -\dfrac{1}{5}$ alors $5x+1<0$ donc :

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{5x+1} \geq 2\right) \Leftrightarrow (x-3 \leq 10x+2) \Leftrightarrow (9x \geq -5) \Leftrightarrow \boxed{x \geq -\frac{5}{9}}.$$

On a : $-\dfrac{5}{9} < -\dfrac{1}{5}$ donc $x \in \left[-\dfrac{5}{9};-\dfrac{1}{5}\right[$.

— Si $x > 3$ alors $5x+1>0$ donc :

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{5x+1} \geq 2\right) \Leftrightarrow (x-3 \geq 10x+2) \Leftrightarrow (9x \leq -5) \Leftrightarrow \boxed{x \leq -\frac{5}{9}}.$$

Ainsi, l'inéquation (1) n'a pas de solution si $x > 3$.

L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x \in \left]-\infty;-\dfrac{1}{5}\right[\cup \left]3;+\infty\right[\\ \ln\left(\dfrac{x-3}{5x+1}\right) - \ln(2) \geq 0 \end{cases}$ est

donc $\boxed{S_1 = \left[-\dfrac{5}{9};-\dfrac{1}{5}\right[}$.

- Résolution de l'inéquation (2) sachant que $x \in \left]-\dfrac{1}{5};3\right[$.

Si $x \in \left]-\dfrac{1}{5};3\right[$ alors $5x+1>0$ donc :

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{3-x}{5x+1} \geq 2\right) \Leftrightarrow (3-x \geq 10x+2) \Leftrightarrow (11x \leq 1) \Leftrightarrow \boxed{x \leq \frac{1}{11}}.$$

La solution du système $\begin{cases} x \in \left]-\dfrac{1}{5};3\right[\\ \ln\left(\dfrac{3-x}{5x+1}\right) - \ln(2) \geq 0 \end{cases}$ est $\boxed{S_2 = \left]-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{11}\right]}$.

- Solution de l'inéquation (E).

L'ensemble solution de l'inéquation (E) est $S = S_1 \cup S_2$.

$$\boxed{S = \left[-\frac{5}{9};-\frac{1}{5}\right[\cup \left]-\frac{1}{5};\frac{1}{11}\right]}.$$

✓ *Résoudre un système d'équations*

Exercice 22.

Résoudre le système $(\Sigma)\begin{cases} x+y=65 \\ \ln(x)+\ln(y)=\ln(1000) \end{cases}$

Exercice 25.

Résoudre le système $(\Sigma)\begin{cases} x+y=7 \\ \ln(x)+\ln(y)=2\ln(2)+\ln(3) \end{cases}$

Solution

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x+y=7 \\ \ln(xy)=\ln(12) \end{cases} \text{ et } (x;y)\in\mathbb{R}_+^*\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \text{ et } (x;y)\in\mathbb{R}_+^*\right)$$

Les nombres x et y, de somme 7 et de produit 12, sont les solutions de l'équation $u^2-7u+12=0$. Le discriminant du trinôme est $\Delta=7^2-4\times12=1$ et ses racines sont : $u_1=3$ et $u_2=4$. Ces deux solutions sont strictement positives donc l'ensemble des solutions du système (Σ) est $\boxed{S=\{(3;4);(4;3)\}}$.

Exercice 26.

Résoudre le système $(\Sigma)\begin{cases} \ln\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)=9 \\ \ln(xy^5)=-\dfrac{17}{2} \end{cases}$

Solution

L'ensemble de définition du système est $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left(\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^3}=e^9 \\ xy^5=e^{-\frac{17}{2}} \end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x=y^{-5}e^{-\frac{17}{2}} \\ \dfrac{\left(y^{-5}e^{-\frac{17}{2}}\right)^2}{y^3}=e^9 \end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x=y^{-5}e^{-\frac{17}{2}} \\ y^{-13}e^{-17}=e^9 \end{cases}\right).$$

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases} x=y^{-5}e^{-\frac{17}{2}} \\ y^{-13}=e^{26} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y^{-5}e^{-\frac{17}{2}} \\ y=e^{-2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=e^{10}e^{-\frac{17}{2}} \\ y=e^{-2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=e^{\frac{3}{2}} \\ y=e^{-2} \end{cases}.$$

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases} x=e\sqrt{e} \\ y=\dfrac{1}{e^2} \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions du système (Σ) est $\boxed{S=\left\{\left(e\sqrt{e};\dfrac{1}{e^2}\right)\right\}}$.

Exercice 27.

Résoudre le système $(\Sigma)\begin{cases} e^x e^y = 6 \\ \dfrac{e^x}{e^y} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Solution

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \dfrac{2}{3}e^y \\ \dfrac{2}{3}e^y e^y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \dfrac{2}{3}e^y \\ e^{2y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 2 \\ e^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(2) \\ y = \ln(3) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (Σ) est $\boxed{S = \{(\ln(2); \ln(3))\}}$.

Exercice 28.

Résoudre le système $(\Sigma)\begin{cases} \ln(3x+4y) - \ln(7) = \ln(2-5x) + \ln(5) \\ e^{x-2}e^{y+3} = 1 \end{cases}$

Solution

L'ensemble de définition du système est :

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < \frac{2}{5} \text{ et } 3x+4y > 0\right\}.$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\dfrac{3x+4y}{7}\right) = \ln[5(2-5x)] \\ e^{x+y+1} = 1 \end{cases} \text{ et } \left[(3x+4y>0) \text{ et } 5(2-5x>0)\right].$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+4y}{7} = 10-25x \\ x+y+1 = 0 \end{cases} \text{ et } \left[(3x+4y>0) \text{ et } (2-5x>0)\right].$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 178x+4y = 70 \\ x+y = -1 \end{cases} \text{ et } \left[(3x+4y>0) \text{ et } (2-5x>0)\right].$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 178x+4y = 70 \\ y = -1-x \end{cases} \text{ et } \left[(3x+4y>0) \text{ et } (2-5x>0)\right].$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 174x = 74 \\ y = -1-x \end{cases} \text{ et } \left[(3x+4y>0) \text{ et } (2-5x>0)\right].$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{37}{87} \\ y = -\dfrac{124}{87} \end{cases} \text{ et } \left[(3x+4y>0) \text{ et } (2-5x>0)\right].$$

Comme $3\times\dfrac{37}{87}+4\times\left(-\dfrac{124}{87}\right)=-\dfrac{385}{87}<0$ le système (Σ) n'admet pas de solution. L'ensemble des solutions est donc vide : $\boxed{S=\varnothing}$.

Exercice 29.

Résoudre le système $(\Sigma)\begin{cases} e^{x+\ln(2)}+e^{y+\ln(5)}=16 \\ e^{x+\ln(3)}+e^{y+\ln(3)}=15 \end{cases}$

Solution

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}2e^x+5e^y=16\\3e^x+3e^y=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2e^x+5e^y=16\\e^x+e^y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2e^x+5e^y=16\\e^y=5-e^x\end{cases}$$

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}2e^x+5(5-e^x)=16\\e^y=5-e^x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3e^x=-9\\e^y=5-e^x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^x=3\\e^y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ln(3)\\y=\ln(2)\end{cases}.$$

L'ensemble des solutions du système (Σ) est $\boxed{S=\left\{\left(\ln(3);\ln(2)\right)\right\}}$.

Exercice 30.

Résoudre le système $(\Sigma)\begin{cases}e^x+e^y=1\\-e^x+e^y=4\end{cases}$

Solution

Si x et y sont solutions du système (Σ) alors par différence $2e^x=-3$. Or, pour tout réel x, $2e^x>0$ donc le système (Σ) n'admet pas de solution. L'ensemble des solutions est donc vide : $\boxed{S=\varnothing}$.

Exercice 31.

Résoudre le système $(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x)+\ln(y)=1\\2\ln^2(y)+2\ln^2(x)=5\end{cases}$

Solution

L'ensemble de définition du système est $\left]0,+\infty\right[\times\left]0,+\infty\right[$.

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x)=1-\ln(y)\\\ln^2(y)+\left(1-\ln(y)\right)^2=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x)=1-\ln(y)\\2\ln^2(y)-2\ln(y)+1=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x)=1-\ln(y) & (1)\\\ln^2(y)-\ln(y)-\dfrac{3}{4}=0 & (2)\end{cases}$$

L'équation (2) nous conduit à la résolution de l'équation :

$u^2 - u - \dfrac{3}{4} = 0$. Son discriminant est $\Delta = 4$ et ses racines sont :

$u_1 = \dfrac{1-2}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$.

$$(2) \Leftrightarrow \left(\ln(y) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \ln(y) = \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(y = e^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } y = e^{\frac{3}{2}}\right).$$

$(2) \Leftrightarrow \left(y = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \text{ ou } y = e\sqrt{e}\right)$. On a alors :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = 1 - \ln(y) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \text{ ou } y = e\sqrt{e} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \ln(x) = 1 - \ln(y) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ln(x) = 1 - \ln(y) \\ y = e\sqrt{e} \end{cases}\right)$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \ln(x) = 1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ln(x) = 1 - \dfrac{3}{2} \\ y = e\sqrt{e} \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = e^{\frac{3}{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = e^{-\frac{1}{2}} \\ y = e\sqrt{e} \end{cases}\right)$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = e\sqrt{e} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \\ y = e\sqrt{e} \end{cases}\right).$$

L'ensemble des solutions du système (Σ) est :

$$\boxed{S = \left\{\left(e\sqrt{e}\,;\frac{1}{\sqrt{e}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\,;e\sqrt{e}\right)\right\}}.$$

*Exercice 32.***

Résoudre le système $(\Sigma)\begin{cases} xy = e \\ 2\ln_y(x) + 2\ln_x(y) = 5 \end{cases}$

Solution

$x \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$ et $y \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$.

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{e}{y} \\ \dfrac{\ln(x)}{\ln(y)} + \dfrac{\ln(y)}{\ln(x)} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{e}{y} \\ \dfrac{1-\ln(y)}{\ln(y)} + \dfrac{\ln(y)}{1-\ln(y)} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$(y \neq e \text{ car } x \neq 1)$.

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{e}{y} & (1) \\ \dfrac{\ln(y)}{1-\ln(y)} + \dfrac{1}{\dfrac{\ln(y)}{1-\ln(y)}} = \dfrac{5}{2} & (2) \end{cases}$$

En posant $u = \dfrac{\ln(y)}{1-\ln(y)}$, on est conduit à résoudre $u^2 - \dfrac{5}{2}u + 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = \dfrac{9}{4}$ et ses racines sont : $u_1 = \dfrac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 2$.

$$\left(\frac{\ln(y)}{1-\ln(y)} = \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\ln(y) = \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\ln(y) = \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(y = e^{\frac{1}{3}}\right).$$

$$\left(\frac{\ln(y)}{1-\ln(y)} = 2\right) \Leftrightarrow (3\ln(y) = 2) \Leftrightarrow \left(\ln(y) = \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \left(y = e^{\frac{2}{3}}\right).$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{e}{y} \\ y = e^{\frac{1}{3}} \quad \text{ou} \quad y = e^{\frac{2}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = \dfrac{e}{y} \\ y = e^{\frac{1}{3}} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = \dfrac{e}{y} \\ y = e^{\frac{2}{3}} \end{cases} \right).$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = e \times e^{-\frac{1}{3}} \\ y = e^{\frac{1}{3}} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = e \times e^{-\frac{2}{3}} \\ y = e^{\frac{2}{3}} \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = e^{\frac{2}{3}} \\ y = e^{\frac{1}{3}} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = e^{\frac{1}{3}} \\ y = e^{\frac{2}{3}} \end{cases} \right).$$

L'ensemble des solutions du système (Σ) est $\boxed{S = \left\{ \left(e^{\frac{2}{3}}; e^{\frac{1}{3}}\right); \left(e^{\frac{1}{3}}; e^{\frac{2}{3}}\right) \right\}}$.

II. *Limites*

✓ *Limites du cours*

Exercice 33.

On pose, pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x)$.

1. Montrer que f admet un minimum en $x = 1$.
2. En déduire que si $x \geq 1$ alors $0 \leq \ln(x) < 2\sqrt{x}$.
3. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Solution

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \boxed{\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}}$. $\big(f'(x)=0\big) \Leftrightarrow (x=1)$.

Si $x>1$ alors $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $\left[1;+\infty\right[$.

Si $0<x<1$ alors $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]0;1\right]$. On en déduit que f admet un minimum en $x=1$ et $f(1)=2$.

2. Donc, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x)>0$, c'est-à-dire $\ln(x)<2\sqrt{x}$. Si $x\geq 1$ alors $0\leq \ln(x)\leq 2\sqrt{x}$.

3. On en déduit que si $x\geq 1$ alors $0\leq \dfrac{\ln(x)}{x}\leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0}$.

Exercice 34.

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$.

Solution

- Pour $x>0$, on a $x\ln(x) = -\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=0$ (d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée). $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0}$.

- On pose, pour $x\in\left]-1;+\infty\right[$, $f(x)=\ln(1+x)$. La fonction f est dérivable sur $\left]-1;+\infty\right[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$. De plus, $f(0)=\ln(1)=0$ donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. C'est donc le taux d'accroissement de la fonction f en 0. Comme f est dérivable en 0, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=f'(0)=1}$.

- $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1}$.

✓ *Polynômes, fonctions rationnelles, quotients*

Exercice 35.

Soit $f(x) = \ln(x) - x$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution

Pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \ln(x) - x = x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -1$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

*Exercice 36.**

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 2} (x-2)\ln\left(\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right)$.

Solution

$$(x-2)\ln\left(\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right) = (x-2)\ln\left(\frac{x+1}{(x-2)^2}\right).$$

$$(x-2)\ln\left(\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right) = (x-2)\left[\ln(x+1) - \ln\left[(x-2)^2\right]\right].$$

$$(x-2)\ln\left(\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right) = (x-2)\ln(x+1) - 2(x-2)\ln(x-2).$$

$\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$ et $\displaystyle\lim_{X\to 0} X\ln(X) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)\ln(x-2) = 0$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 2}\ln(x+1) = \ln(3)$, car la fonction ln est continue en 2, on a

$\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)\ln(x+3) = 0$. Finalement, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)\ln\left(\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right) = 0}$.

Exercice 37.

Soit $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln(x)$. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Solution

L'ensemble de définition de f est $E_f = \left]0; +\infty\right[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(x) = x + \ln(x+1) - \ln(x) = x + \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) - \ln(x).$$

$$f(x) = x + \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(x) = x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

- *Limite en 0* : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$. On obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$.

- *Limite en* $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

Exercice 38.

Soit $f(x) = x + \ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Solution

La fonction f est définie pour tout réel x vérifiant $\frac{x-1}{2x+3} > 0$.

L'ensemble de définition est $\boxed{E_f = \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left]1;+\infty\right[}$.

Pour tout réel x appartenant à E_f, on pose $u(x) = \frac{x-1}{2x+3}$.

$u(x) = \frac{x-1}{2x+3} = \frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-}(x-1) = -\frac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-}(2x+3) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} u(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = 5$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} u(x) = 0^+$.

- *Limite en* $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{X\to\frac{1}{2}} \ln(X) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)\right] = -\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}.$$

- *Limite en* $-\frac{3}{2}^-$: $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} u(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-}\ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-}\left[x+\ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)\right]=+\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\frac{3}{2}^-} f(x)=+\infty}.$$

- *Limite en* 1^+ : $\lim\limits_{x\to1^+} u(x)=0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\ln(X)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)=-\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^+}\left[x+\ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)\right]=-\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty}.$$

- *Limite en* $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x+3}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{X\to\frac{1}{2}}\ln(X)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)\right]=+\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}.$$

Exercice 39.

Soit $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}\right)$. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Solution

La fonction f est définie pour tout réel x vérifiant $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}>0$.

Le discriminant du polynôme x^2-x+1 est $\Delta=-3<0$.

Pour tout réel x, $x^2-x+1>0$.

Les racines du polynôme x^2+3x+2 sont -1 et -2.

$\left(x^2+3x+2>0\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-1;+\infty\right[\right)$.

$\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}>0\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-1;+\infty\right[\right)$.

Finalement, $\boxed{E_f=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-1;+\infty\right[}$.

Pour tout réel x de E_f, on pose $u(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}$. Ainsi, $f=\ln\circ u$.

De plus, pour tout réel non nul x, $u(x)=\dfrac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to-2^-}\left(x^2+3x+2\right)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2-x+1\right)=7$ donc $\lim\limits_{x\to-2^-} u(x)=0^+$.

$\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x^2+3x+2\right)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2-x+1\right)=3$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} u(x)=0^+$.

- *Limite en* $+\infty$ *et en* $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$ et $\lim\limits_{X\to1}\ln(X)=\ln(1)=0$ donc d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$.
- *Limites en* -2 *et en* -1 : $\lim\limits_{x\to-2^-} u(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} u(x)=0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\ln(X)=-\infty$ donc d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty}$.

Exercice 40.

Soit $f(x)=\dfrac{\ln(2x+3)}{\ln(x)}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution

Pour tout $x>0$, on a $\ln(2x+3)=\ln\left[x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)\right]=\ln(x)+\ln\left(2+\dfrac{3}{x}\right)$.

Donc, $f(x)=\dfrac{\ln(2x+3)}{\ln(x)}=1+\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\ln(x)}$.

On utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)=2$ et $\lim\limits_{X\to2}\ln(X)=\ln(2)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2+\dfrac{3}{x}\right)=\ln(2)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(x)}=0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2+\dfrac{3}{x}\right)=\ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(x)}=0$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(2+\frac{3}{x}\right)\times\frac{1}{\ln(x)} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{\ln\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\ln(x)}\right] = 1 \text{ et}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}.$$

✓ ***Limites avec des racines carrées***

Exercice 41.

Soit f la fonction définie par $f(x) = (3x-5)\ln\left(\sqrt{3x^2+x-10}\right)$.

Donner l'ensemble de définition de f puis déterminer la limite de f en $\frac{5}{3}$.

Solution

On peut remarquer que $3x^2+x-10 = (3x-5)(x+2)$ donc l'ensemble de définition de f est $\boxed{E_f = \left]-\infty;-2\right[\cup \left]\frac{5}{3};+\infty\right[}$.

Pour $x > \frac{5}{3}$, on a : $f(x) = \frac{1}{2}(3x-5)\ln[(3x-5)(x+2)]$.

$f(x) = \frac{1}{2}(3x-5)\ln(3x-5) + \frac{1}{2}(3x-5)\ln(x+2)$.

$\lim_{x\to\frac{5}{3}^+}(3x-5) = 0^+$ et $\lim_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$ donc

$\lim_{x\to\frac{5}{3}^+}(3x-5)\ln(3x-5) = 0$. La fonction $x\mapsto \ln(x+2)$ est continue en $\frac{5}{3}$ donc $\lim_{x\to\frac{5}{3}}\ln(x+2) = \ln\left(\frac{11}{3}\right)$.

$\lim_{x\to\frac{5}{3}}(3x-5) = 0$ donc $\lim_{x\to\frac{5}{3}}[(3x-5)\ln(3x+5)] = 0$. En conclusion,

$\lim_{x\to\frac{5}{3}^+}[(3x-5)\ln(3x-5)+(3x-5)\ln(x+2)] = 0$, d'où $\boxed{\lim_{x\to\frac{5}{3}^+} f(x) = 0}$.

Exercice 42.

Soit $f(x) = \frac{\ln(2x-1)}{\sqrt{x}}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution

Pour $x > \dfrac{1}{2}$, on a :

$$f(x) = \frac{\ln(2x-1)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln\left[x\left(2-\frac{1}{x}\right)\right]}{\sqrt{x}} = 2 \times \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right) = 2$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = 0$.

En conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x-1)}{\sqrt{x}} = 0}$.

*Exercice 43.**

Soit $f(x) = \ln^5(x) - \sqrt{x}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution

Pour $x > 0$, on pose $u = \sqrt{x}$.

$$f(x) = \ln^5(x) - \sqrt{x} = \ln^5\left(u^2\right) - u = u\left[2^5 \times \frac{\ln^5(u)}{u} - 1\right].$$

On a $\dfrac{\ln^5(u)}{u} = \dfrac{\ln^5\left(u^{\frac{5}{5}}\right)}{u^{\frac{5}{5}}} = \left[\dfrac{\ln\left(u^{\frac{5}{5}}\right)}{u^{\frac{1}{5}}}\right]^5 = 5^5\left[\dfrac{\ln\left(u^{\frac{1}{5}}\right)}{u^{\frac{1}{5}}}\right]^5$.

$u^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}\ln(u)}$.

$\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{5}\ln(u) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{\frac{1}{5}\ln(u)} = +\infty$.

$\lim\limits_{u\to+\infty} u^{\frac{1}{5}} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln\left(u^{\frac{1}{5}}\right)}{u^{\frac{1}{5}}} = 0$.

$\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln\left(u^{\frac{1}{5}}\right)}{u^{\frac{1}{5}}} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} X^5 = 0$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} \left[\dfrac{\ln\left(u^{\frac{1}{5}}\right)}{u^{\frac{1}{5}}}\right]^5 = 0$.

On en déduit $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln^5(u)}{u}=0$, donc $\lim\limits_{u\to+\infty}\left[2^5\times\dfrac{\ln^5(u)}{u}-1\right]=-1$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} u\times\left[\dfrac{\ln^5\left(u^2\right)}{u}-1\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} u\times\left[\dfrac{\ln^5\left(u^2\right)}{u}-1\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\times\left[\dfrac{\ln^5(x)}{\sqrt{x}}-1\right]=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln^5(x)-\sqrt{x}\right]=-\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}.$$

Remarque : On peut aller plus vite en utilisant les théorèmes sur la comparaison des croissances des fonctions puissances et logarithme.

Exercice 44.

Soit $f(x)=\dfrac{\ln(1+5x)}{\sqrt{x}}$. Déterminer la limite de f en 0^+.

Solution

Pour $x>0$, on a :

$f(x)=\dfrac{\ln(1+5x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{5x}{\sqrt{x}}\times\dfrac{\ln(1+5x)}{5x}=5\sqrt{x}\times\dfrac{\ln(1+5x)}{5x}$.

$\lim\limits_{x\to0}5x=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ (limite du cours)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)}{5x}=1$.

Comme $\lim\limits_{x\to0^+}5\sqrt{x}=0$, on a $\lim\limits_{x\to0^+}5\sqrt{x}\times\dfrac{\ln(1+5x)}{5x}=0$.

En conclusion, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0}$.

Exercice 45.

Soit $f(x)=\sqrt{x}\ln^2(x)$. Déterminer la limite de f en 0^+.

Solution

On pose $u=\sqrt{x}$.

$f(x)=\sqrt{x}\ln^2(x)=u\ln^2\left(u^2\right)=u(2\ln(u))^2$.

$f(x)=u\left(4\ln\left(\sqrt{u}\right)\right)^2=\left(4\sqrt{u}\ln\left(\sqrt{u}\right)\right)^2$.

$\lim\limits_{u\to0}\sqrt{u}=0$ et $\lim\limits_{X\to0}X\ln(X)=0$ donc $\lim\limits_{u\to0}\sqrt{u}\ln(\sqrt{u})=0$.

$\lim\limits_{u\to0}\sqrt{u}\ln(\sqrt{u})=0$ et $\lim\limits_{X\to0}(4X)^2=0$ donc $\lim\limits_{u\to0}\left(4\sqrt{u}\ln(\sqrt{u})\right)^2=0$.

$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$ et $\lim\limits_{u\to0}u\ln^2\left(u^2\right)=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}\ln^2(x)=0}$.

✓ *Fonctions trigonométriques*

Exercice 46.

Soit $f(x)=\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution

Pour tout $x>0$, on a $-1\leq\cos(\ln(x))\leq1$ et $\dfrac{-1}{x}\leq\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}\leq\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$ donc, en utilisant le théorème des gendarmes, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}=0$. $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

*Exercice 47.***

Soit $f(x)=\ln(\cos(x))\times\ln(x)$. Déterminer la limite de f en 0^+. (On rappelle la formule $1-\cos(x)=2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$).

Solution

Pour tout x appartenant à $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$f(x)=\ln(\cos(x))\times\ln(x)=\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\times\ln(x).$$

$$f(x)=\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\times2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\times\ln(x).$$

$$f(x)=-\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\times\sin\left(\frac{x}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\times(-x\ln(x)).$$

On utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée.

On a : $\lim\limits_{x\to0}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=0$ et $\lim\limits_{X\to0}X^2=0$ donc $\lim\limits_{x\to0}\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=0$.

$\lim\limits_{x \to 0} -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin(X)}{X} = \cos(0) = 1$ donc, d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, on a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$.

En utilisant $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ (limite du cours), on obtient :

$$\lim_{x \to 0^+} \left[-\frac{\ln\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \times x\ln(x) \right] = 0 .$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0} .$$

III. *La continuité*

Exercice 48.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que si x est un réel non nul alors f est continue en x et étudier la continuité de f en 0.

Solution

- *Continuité en* $x \neq 0$: la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et est strictement positive, la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Donc le produit de ces deux fonctions, c'est-à-dire la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \times \ln\left(1+x^2\right)$, est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- *Continuité en 0* : pour $x \neq 0$, on a $f(x) = x \times \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$.

D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, on a :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc, d'après le théorème sur la limite des fonctions composées, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ et f est continue en 0. Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 49.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que si x est un réel différent de 1 alors f est continue en x puis étudier la continuité de f en 1.

Solution

- *Continuité en* $x \neq 1$: sur $\left]-\infty;1\right[$, la fonction $x \mapsto x^2$ est continue. Sur $\left]1;+\infty\right[$, la fonction ln est continue ainsi que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ donc le produit de ces deux fonctions, c'est à dire la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$, est encore continue. La fonction constante égale à 1 est continue sur $\left]1;+\infty\right[$ donc la fonction $x \mapsto 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $\left]1;+\infty\right[$. Donc si x est un réel différent de 1 alors la fonction f est continue en x.
- *Continuité en 1* : $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est continue en 1. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ car la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est continue en 1.

Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[1 + \dfrac{\ln(x)}{x}\right] = 1$. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ on en déduit alors $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$ et f est continue en 1. Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

IV. *La dérivation*

✓ *Dérivabilité en un point*

Exercice 50.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Montrer que si x est un réel non nul alors f est dérivable en x puis étudier la dérivabilité de f en 0.

Solution

∘ *Dérivabilité en* $x \neq 0$: la fonction $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc le produit de ces deux fonctions, c'est-à-dire la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} \times \ln\left(1+x^2\right)$, est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

∘ *Dérivabilité en 0* : pour x non nul, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$.

D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, on a :

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} = 1$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1$ donc f est dérivable en 0 et on a : $\boxed{f'(0) = 1}$.

Exercice 51.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Montrer que si x est un réel différent de 1 alors f est dérivable en x puis étudier la dérivabilité de f en 1.

Solution

∘ *Dérivabilité en* $x \neq 1$: sur $\left]-\infty;1\right[$, la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable. Sur $\left]1;+\infty\right[$, la fonction ln est dérivable, ainsi que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Le produit de ces deux fonctions, c'est-à-dire la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$, est encore dérivable. On en déduit que la fonction $x \mapsto 1+\frac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$. Si x est un réel différent de 1 alors la fonction f est dérivable en x.

- *Dérivabilité en 1* : on pose $x = 1+h$.

- Si $h<0$ alors $f(1+h) = (1+h)^2$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 2+h.$$

donc $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$.

- Si $h>0$ alors $f(1+h) = 1+\frac{\ln(1+h)}{1+h}$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1+\frac{\ln(1+h)}{1+h}-1}{h} = \frac{\ln(1+h)}{(1+h)h} = \frac{1}{1+h}\times\frac{\ln(1+h)}{h}.$$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ (limite du cours) et $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{1+h} = 1$ donc $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{1+h}\times\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ d'où $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1$.

Comme $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1$, la fonction f n'est pas dérivable en 1 (elle est cependant continue en 1, voir exercice 49).

✓ *Ln et fonctions polynômes ou rationnelles*

Exercice 52.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes, on admettra que ces fonctions sont dérivables sur I.

1. $f(x) = \ln(5x^2 - x + 1)$, $I = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = 5\ln^2(x) - \ln(x) + 1$, $I = \mathbb{R}_+^*$.

Solution

1. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 5x^2 - x + 1$. $u(x) > 0$ et on a :

$f(x) = \ln(u(x))$. Comme $u'(x) = 10x - 1$, on en déduit :

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{10x-1}{5x^2 - x + 1}$. Pour tout réel x : $\boxed{f'(x) = \dfrac{10x-1}{5x^2-x+1}}$.

2. On peut remarquer que $g(x) = u(\ln(x))$ donc :

$$g'(x) = \frac{1}{x} \times u'(\ln(x)) = \frac{1}{x}(10\ln(x) - 1) = \frac{10\ln(x) - 1}{x}.$$

Pour tout x de I, on a : $\boxed{g'(x) = \dfrac{10\ln(x)-1}{x}}$.

Exercice 53.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes, on admettra que ces fonctions sont dérivables sur I.

1. $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 1)$, $I = \left[2; +\infty\right[$.
2. $g(x) = \ln^3(x) - 3\ln(x) + 1$, $I = \left]0; +\infty\right[$.

Solution

1. Pour tout $x \in \left[2; +\infty\right[$, on pose $u(x) = x^3 - 3x + 1 > 0$.

$f(x) = \ln(u(x))$. Comme $u'(x) = 3x^2 - 3$, on en déduit :

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+1}$. $\boxed{f'(x) = \dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+1}}$.

2. On peut remarquer que $g(x) = u(\ln(x))$ donc $g'(x) = \dfrac{1}{x} \times u'(\ln(x))$

Pour tout x appartenant à $\left]0; +\infty\right[$, on a : $\boxed{g'(x) = \dfrac{3\ln^2(x) - 3}{x}}$.

Exercice 54.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes, on admettra que ces fonctions sont dérivables sur I.

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x-2}\right)$, $I = \left]2; +\infty\right[$.
2. $g(x) = \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x) - 1}{\ln(x) - 2}$, $I = \left]e^2; +\infty\right[$.

Solution

1. Pour tout $x \in \left]2; +\infty\right[$, on pose $u(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x-2} > 0$.

$$u'(x) = \frac{(2x+2)(x-2)-(x^2+2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}.$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}}{\frac{x^2+2x-1}{x-2}} = \frac{x^2-4x-3}{(x-2)(x^2+2x-1)}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2-4x-3}{(x-2)(x^2+2x-1)}}.$$

2. En remarquant que $g(x) = u(\ln(x))$, on a $g'(x) = \frac{1}{x} \times u'(\ln(x))$.

Pour tout x appartenant à $\left]e^2;+\infty\right[$, on a :

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{\ln^2(x) - 4\ln(x) - 3}{(\ln(x)-2)^2}}.$$

Exercice 55.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes, on admettra que ces fonctions sont dérivables sur I.

1. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+3x-1}{x-4}\right)$, $I = \left]4;+\infty\right[$.
2. $g(x) = \frac{\ln^2(x)+3\ln(x)-1}{\ln(x)-4}$, $I = \left]e^4;+\infty\right[$.

Solution

1. Pour tout $x \in \left]4;+\infty\right[$, on pose $u(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-4} > 0$.

Comme $u'(x) = \frac{x^2-8x-11}{(x-4)^2}$, on en déduit :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{x^2-8x-11}{(x-4)^2}}{\frac{x^2+3x-1}{x-4}} = \frac{x^2-8x-11}{(x-4)(x^2+3x-1)}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2-8x-11}{(x-4)(x^2+3x-1)}}.$$

2. En remarquant que $g(x) = u(\ln(x))$, on a $g'(x) = \frac{1}{x} \times u'(\ln(x))$.

Pour tout x appartenant à $\left]e^4;+\infty\right[$, on a :

$$\boxed{g'(x) = \frac{\ln^2(x) - 8\ln(x) - 11}{x(\ln(x) - 4)^2}}.$$

✓ Logarithme et fonctions trigonométriques

Exercice 56.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition de ces fonctions et l'ensemble de dérivabilité.

1. $f(x) = \ln(\sin(x))$.
2. $g(x) = \sin(\ln(x))$.

Solution

1. Si on appelle E_f l'ensemble de définition de f, on a :

$(x \in E_f) \Leftrightarrow (\sin(x) > 0) \Leftrightarrow \left(x \in \left]2k\pi;(2k+1)\pi\right[\text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right)$.

Donc E_f est la réunion des intervalles de la forme $\left]2k\pi;(2k+1)\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{E_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi;(2k+1)\pi\right[}.$$

Sur E_f, la fonction sin est dérivable et strictement positive. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la composée $f = \ln\circ\sin$ est dérivable sur E_f et $f'(x) = \frac{\sin'(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$. $\boxed{f'(x) = \frac{1}{\tan(x)}}$.

2. $\boxed{E_g = \mathbb{R}_+^*}$. Sur E_g, la fonction ln est dérivable. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la composée $g = \sin\circ\ln$ est dérivable sur E_g. On a : $g'(x) = \ln'(x) \times \cos(\ln(x)) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$. $\boxed{g'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}}$.

Exercice 57.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition de ces fonctions et l'ensemble de dérivabilité.

1. $f(x) = \ln(\cos(x))$.
2. $g(x) = \cos(\ln(x))$.

Solution

1. Si on note E_f l'ensemble de définition de la fonction f on a :

$$\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow (\cos(x) > 0) \Leftrightarrow \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right).$$

Donc l'ensemble de définition, E_f, de la fonction f est la réunion des intervalles de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{E_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[}.$$

Sur E_f, la fonction cos est dérivable et strictement positive. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la composée $f = \ln\circ\cos$ est dérivable sur E_f. $f'(x) = \dfrac{\cos'(x)}{\cos(x)} = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$. $\boxed{f'(x) = -\tan(x)}$.

2. $\boxed{E_g = \mathbb{R}_+^*}$. Sur E_g, la fonction ln est dérivable. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la composée $g = (\cos)\circ\ln$ est dérivable sur E_g.

On a : $g'(x) = \ln'(x)\times\left(-\sin(\ln(x))\right)$. $\boxed{g'(x) = -\dfrac{\sin(\ln(x))}{x}}$.

Exercice 58.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition de ces fonctions et l'ensemble de dérivabilité.

1. $f(x) = \ln(\tan(x))$.
2. $g(x) = \tan(\ln(x))$.

Solution

1. Si on note E_f l'ensemble de définition de la fonction f, on a :

$$\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow (\tan(x) > 0) \Leftrightarrow \left(x \in \left]k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right).$$

E_f est la réunion des intervalles $\left]k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{E_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[}.$$

Sur E_f, la fonction tan est dérivable et strictement positive. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f = \ln\circ\tan$ est dérivable sur E_f.

Pour tout $x \in E_f$, $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$.

$$f'(x) = \frac{\tan'(x)}{\tan(x)} = \frac{1+\tan^2(x)}{\tan(x)} = \frac{1}{\tan(x)} + \tan(x).$$

Pour tout $x \in E_f$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} + \tan(x)}$ ou $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\sin(x)\cos(x)}}$

ou $\boxed{f'(x) = \dfrac{2}{\sin(2x)}}$.

2. Si on note E_g, l'ensemble de définition de g on a :

$(x \in E_g) \Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right)$.

$(x \in E_g) \Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ et } x \neq e^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right)$.

donc E_g est l'ensemble des réels strictement positifs différents des nombres de la forme $e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout x de E_g, la fonction ln est dérivable en x et $\ln(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc la fonction tan est dérivable en $\ln(x)$. La fonction g est donc dérivable sur E_g.

Pour tout $x \in E_g$ $g'(x) = \ln'(x) \times \tan'(\ln(x)) = \dfrac{1}{x}\left(1 + \tan^2(\ln(x))\right)$.

$\boxed{g'(x) = \dfrac{1}{x}\left(1 + \tan^2(\ln(x))\right)}$ ou $\boxed{g'(x) = \dfrac{1}{x\cos^2(\ln(x))}}$.

Exercice 59.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition de ces fonctions et l'ensemble de dérivabilité.

1. $f(x) = \ln\left(\sin^2(x)\right)$.
2. $g(x) = \sin^2(\ln(x))$.

Solution

On pose $u(x) = \sin^2(x)$. On appelle E_f l'ensemble de définition de la fonction f.

$(x \in E_f) \Leftrightarrow (u(x) > 0) \Leftrightarrow (\sin(x) \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z})$.

L'ensemble de définition, E_f, de la fonction f est la réunion des intervalles $\left]k\pi ; (k+1)\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui peut s'écrire

$$\boxed{E_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]k\pi ; (k+1)\pi\right[}.$$

Sur E_f, la fonction u est dérivable et strictement positive. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la composée $f = \ln \circ u$ est dérivable sur E_f. $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)}$. $\boxed{f'(x) = \dfrac{2\cos(x)}{\sin(x)}}$.

1. On peut remarquer que $g(x) = u(\ln(x))$ avec $u(x) = \sin^2(x)$.

Si on appelle E_g l'ensemble de définition de la fonction g, on a : $(x \in E_g) \Leftrightarrow (x > 0)$ donc $E_g = \mathbb{R}_+^*$. Sur E_g, la fonction ln est dérivable. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la composée $g = u \circ \ln$ est dérivable sur E_g. Pour tout x appartenant à E_g, on a :

$g'(x) = \ln'(x) \times 2\sin(\ln(x))\cos(\ln(x))$. $\boxed{g'(x) = \dfrac{\sin(2\ln(x))}{x}}$.

*Exercice 60.**

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition de ces fonctions et l'ensemble de dérivabilité.

1. $f(x) = \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$.

2. $g(x) = \tan\left(\dfrac{\ln(x)}{2}\right)$.

Solution

1. On pose $u(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

$(u(x) > 0) \Leftrightarrow \left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) > 0\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{2} \in \left]k\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[\right)$.

Finalement, $(u(x) > 0) \Leftrightarrow \left(x \in \left]2k\pi ; (2k+1)\pi\right[\text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right)$.

On en déduit que l'ensemble de définition, E_f, de la fonction f est la réunion des intervalles de la forme $\left]2k\pi ; (2k+1)\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui peut s'écrire : $\boxed{E_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]2k\pi ; (2k+1)\pi\right[}$.

Sur E_f, la fonction u est dérivable et strictement positive. La fonction ln étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la composée, $f = \ln \circ u$, est dérivable sur E_f. On a : $u'(x) = \dfrac{1}{2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\dfrac{1}{2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}}{\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}. \boxed{f'(x) = \frac{1}{\sin(x)}}.$$

2. On peut remarquer que $g(x) = u(\ln(x))$.

Si on appelle E_g l'ensemble de définition de la fonction g, on a :

$(x \in E_g) \Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right)$.

$(x \in E_g) \Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ et } x \neq e^{(2k+1)\pi} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right)$.

Donc l'ensemble E_g est l'ensemble des réels strictement positifs privé des nombres de la forme $x \neq e^{(2k+1)\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour tout x appartenant à E_g, la fonction ln est dérivable en x et la fonction u est dérivable en $\ln(x)$, donc la fonction g est dérivable en x.

Pour tout x appartenant à E_g, on a : $\boxed{g'(x) = \dfrac{1}{2x\cos^2\left(\dfrac{\ln(x)}{2}\right)}}$.

✓ *Ln et racine carrée*

Exercice 61.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition de ces fonctions et l'ensemble de dérivabilité

1. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
2. $g(x) = \ln(x) + \sqrt{\ln^2(x) - 1}$.

Solution

1. On pose $u(x) = x + \sqrt{x^2+1}$. La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus elle y est strictement positive (en effet $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$). La fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la composée $\ln \circ u$, c'est-à-dire f, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $u'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ et donc

$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Pour tout réel x, $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$.

2. On peut remarquer que $g(x)=u(\ln(x))$. La fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et, comme la fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la composée $u\circ\ln$, c'est-à-dire g, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $g'(x)=\dfrac{1}{x}\times u'(\ln(x))=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{u(\ln(x))}{\sqrt{\ln^2(x)+1}}=\boxed{\dfrac{\ln(x)+\sqrt{\ln^2(x)+1}}{x\sqrt{\ln^2(x)+1}}}$.

*Exercice 62.***

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition de ces fonctions et l'ensemble de dérivabilité.

1. $f(x)=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$.
2. $g(x)=\ln(x)-\sqrt{\ln^2(x)-1}$.

Solution

1. On pose $u(x)=x-\sqrt{x^2-1}$.

On a $x^2-1\geq 0$ si et seulement si $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$.

Donc u est définie sur $I=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$.

Étude du signe de $u(x)$ pour $x\in I$.

$\left(x\in I \text{ et } u(x)>0\right)\Leftrightarrow\left(x\in I \text{ et } x>\sqrt{x^2-1}\right)$.

$\left(x\in I \text{ et } u(x)>0\right)\Leftrightarrow\left(x>1 \text{ et } x^2>x^2-1\right)$.

$\left(x\in I \text{ et } u(x)>0\right)\Leftrightarrow\left(x>1 \text{ et } 0>-1\right)$.

$\left(x\in I \text{ et } u(x)>0\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left]1;+\infty\right[\right)$.

On en déduit que sur $\left]1;+\infty\right[$, la fonction u est définie et dérivable. De plus, sur cet intervalle, u est strictement positive. Comme la fonction ln est définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$, la composée, $\ln\circ u=f$, est définie et dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$.

Pour tout réel x appartenant à $\left]1;+\infty\right[$, on a :

$$u'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -\frac{u(x)}{\sqrt{x^2-1}}, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}. \quad \boxed{f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}}.$$

2. $g(x) = \ln(x) - \sqrt{\ln^2(x) - 1}$.

On peut remarquer que $g(x) = u(\ln(x))$. La fonction ln est définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

La fonction u est définie sur $I = \left]-\infty;-1\right] \cup \left[1;+\infty\right[$.

On a : $\left(\ln(x) \in \left]-\infty;-1\right] \cup \left[1;+\infty\right[\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left]0;\frac{1}{e}\right] \cup \left[e;+\infty\right[\right)$.

On en déduit que la composée $u \circ \ln$, c'est-à-dire g, est définie sur $\boxed{J = \left]0;\frac{1}{e}\right] \cup \left[e;+\infty\right[}$.

La fonction u est dérivable sur $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$ (Attention la fonction racine n'est pas dérivable en 0).

On a : $\left(\ln(x) \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left]0;\frac{1}{e}\right[\cup \left]e;+\infty\right[\right)$.

La composée $u \circ \ln$, c'est-à-dire g, est dérivable sur $\boxed{K = \left]0;\frac{1}{e}\right[\cup \left]e;+\infty\right[}$. Pour tout réel x de K, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{x} \times u'(\ln(x)) = \frac{1}{x} \times \left[\frac{-u(\ln(x))}{\sqrt{\ln^2(x)-1}}\right] = \frac{1}{x} \times \left[\frac{\sqrt{\ln^2(x)-1} - \ln(x)}{\sqrt{\ln^2(x)-1}}\right].$$

Donc $\boxed{g'(x) = \frac{1}{x} \times \left[1 - \frac{\ln(x)}{\sqrt{\ln^2(x)-1}}\right]}$.

Exercice 63.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \sqrt{x^2 - 1 - \ln(x^2)}$.

Soit $I = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;0\right[\cup \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$.

Vérifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur I, puis déterminer la dérivée de la fonction f sur $\left]1;+\infty\right[$.

Solution

On pose $u(x) = x^2 - 1 - \ln(x^2)$. On utilise les résultats de l'exercice 68.

Pour tout $x > 0$, on a : $\ln(x) \leq x - 1$. Si on remplace x par x^2, on a :

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\ln\left(x^2\right) \leq x^2 - 1$, et donc $u(x) \geq 0$. Comme $f = \sqrt{u}$, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

Pour x différent de 0, on a : $u'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - 1\right)}{x}$. La fonction u est paire, strictement décroissante sur $\left]0;1\right]$ et strictement croissante sur $\left[1;+\infty\right[$. Comme $u(1) = 0$, on a, pour tout x appartenant à I, $u(x) \neq 0$ donc $u(x) > 0$.

Sur E_f, la fonction u est dérivable et strictement positive, donc la fonction $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur E_f.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\dfrac{2\left(x^2 - 1\right)}{x}}{2\sqrt{x^2 - 1 - \ln\left(x^2\right)}}. \quad \boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x^2 - 1 - \ln\left(x^2\right)}}}.$$

Remarque : on montre que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(1+x) - f(1)}{x} = -\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(1+x) - f(1)}{x} = \sqrt{2}$. La fonction f n'est pas dérivable en 1. En utilisant la parité de f, on en déduit que f n'est pas dérivable en -1.

✓ *Logarithme et exponentielle*

Exercice 64.

> Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition de ces fonctions et l'ensemble de dérivabilité :
>
> $$f(x) = \ln\left(e^x - 1\right), \quad g(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 3\right).$$

Solution

- Si on appelle E_f l'ensemble de définition de f on a :

$\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow \left(e^x - 1 > 0\right) \Leftrightarrow \left(e^x > 1\right) \Leftrightarrow (x > 0)$ donc $\boxed{E_f = \left]0;+\infty\right[}$.

On pose, pour tout réel x de E_f, $u(x) = e^x - 1$. On a $f = \ln \circ u$. Sur E_f, la fonction u est dérivable et strictement positive et la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction composée, $\ln \circ u = f$, est dérivable sur E_f. On a $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}}$.

- On pose $u(x) = e^{2x} - e^x + 3$. Le discriminant de $x^2 - x + 3$ est négatif (-11). On a, pour tout réel x, $x^2-x+3>0$. La fonction u est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Si on appelle E_g l'ensemble de définition de la fonction composée, $\ln\circ u=g$, on a $\boxed{E_g=\mathbb{R}}$. Sur E_g, la fonction u est dérivable et strictement positive et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction composée, $\ln\circ u=g$, est dérivable sur E_g. On a $g'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc $\boxed{g'(x)=\dfrac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+3}}$.

Exercice 65.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition de ces fonctions et l'ensemble de dérivabilité.

$$f(x)=\ln\left(e^{2x-5}-7\right),\ g(x)=\ln\left(-2e^{2x}-e^x+6\right).$$

Solution

- $f(x)=\ln\left(e^{2x-5}-7\right)$. On pose $u(x)=e^{2x-5}-7$ et on appelle E_f l'ensemble de définition de f.

$\left(x\in E_f\right)\Leftrightarrow\left(u(x)>0\right)\Leftrightarrow\left(e^{2x-5}>7\right)\Leftrightarrow\left(2x-5>\ln(7)\right)\Leftrightarrow\left(x>\dfrac{\ln(7)+5}{2}\right)$

donc $\boxed{E_f=\left]\dfrac{\ln(7)+5}{2};+\infty\right[}$.

Sur E_f, la fonction u est dérivable et strictement positive et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction composée, $\ln\circ u=f$, est dérivable sur E_f. On a $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{2e^{2x-5}}{e^{2x-5}-7}}$.

- $g(x)=\ln\left(-2e^{2x}-e^x+6\right)$. On pose $u(x)=-2e^{2x}-e^x+6$ et on appelle E_g l'ensemble de définition de g. On doit étudier le signe de $u(x)$. On peut remarquer qu'en posant $X=e^x$ cela revient à étudier le signe du polynôme $-2X^2-X+6$ sachant que $X>0$.

$\Delta=49$, $X_1=\dfrac{1-7}{-4}=\dfrac{3}{2}$ et $X_2=\dfrac{1+7}{-4}=-2$.

Donc $\left(\begin{cases}-2X^2-X+6>0\\ X>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(X\in\left]0;\dfrac{3}{2}\right[\right)$.

Comme $X=e^x$ on a : $\left(u(x)>0\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left]-\infty;\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right[\right)$.

En conclusion : $\boxed{E_g = \left]-\infty ; \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right[}$.

Sur E_g la fonction u est dérivable et strictement positive et la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction composée, $\ln \circ u = g$, est dérivable sur E_g. On a $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $\boxed{g'(x) = \frac{-4e^{2x} - e^x}{-2e^x - e^x + 6}}$.

Exercice 66.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 3e^x + 3}{e^{2x} - 3e^x + 2}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition E_f de la fonction f ainsi que l'ensemble $E_{f'}$ sur lequel elle est dérivable.
2. Déterminer, pour tout réel de l'ensemble $E_{f'}$, la dérivée de f.

Solution

1. On pose $u(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + 3}{e^{2x} - 3e^x + 2}$. On a : $f = \ln \circ u$.

Le discriminant du trinôme $X^2 - 3X + 3$ est négatif ; pour tout réel x, $e^{2x} - 3e^x + 3 > 0$. Le signe de $u(x)$ est celui de son dénominateur, c'est-à-dire $e^{2x} - 3e^x + 2$. On a : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. D'après le signe du trinôme, on a : $\left(\begin{cases} X^2 - 3X + 2 > 0 \\ X > 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(X \in \left]0;1\right[\cup \left]2;+\infty\right[\right)$.

$(0 < X < 1) \Leftrightarrow (0 < e^x < 1) \Leftrightarrow (\ln(e^x) < \ln(1)) \Leftrightarrow (x < 0)$.

$(2 < X) \Leftrightarrow (2 < e^x) \Leftrightarrow (\ln(2) < \ln(e^x)) \Leftrightarrow (\ln(2) < x)$.

$(x \in E_f) \Leftrightarrow (e^{2x} - 3e^x + 2 > 0)$.

$(x \in E_f) \Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]\ln(2);+\infty\right[\right)$.

$$\boxed{E_f = \left]-\infty;0\right[\cup \left]\ln(2);+\infty\right[}.$$

La fonction u est dérivable et strictement positive sur E_f et la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la composée, $f = \ln \circ u$, est dérivable sur E_f. $\boxed{E_{f'} = E_f = \left]-\infty;0\right[\cup \left]\ln(2);+\infty\right[}$.

2. On peut remarquer, pour faciliter le calcul de la dérivée, que :

Pour tout x appartenant à $\left]-\infty;0\right[\cup \left]\ln(2);+\infty\right[$.

$$u(x)=\frac{e^{2x}-3e^{x}+2+1}{e^{2x}-3e^{x}+2}=1+\frac{1}{e^{2x}-3e^{x}+2}\ .\quad u'(x)=-\frac{2e^{2x}-3e^{x}}{\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)^{2}}\ .$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{-\dfrac{2e^{2x}-3e^{x}}{\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)^{2}}}{\dfrac{e^{2x}-3e^{x}+3}{e^{2x}-3e^{x}+2}}=\boxed{-\frac{2e^{2x}-3e^{x}}{\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)}}\ .$$

V. *Position relative de la courbe et d'une droite*

✓ *Position relative de la courbe et de la tangente*

Exercice 67.

Soit (C) la courbe d'équation $y=\ln(x)$. Montrer que (C) est située en dessous de toutes ses tangentes.

Soit α un réel strictement positif. On considère le point $M\Big(\alpha,\ln(\alpha)\Big)$ appartenant à (C). La tangente T, en M, à (C) a pour équation :
$y=\dfrac{1}{\alpha}(x-\alpha)+\ln(\alpha)$ c'est-à-dire $y=\dfrac{1}{\alpha}x+\ln(\alpha)-1$.

La position de la courbe par rapport à sa tangente s'obtient en étudiant le signe de $\varphi(x)=\ln(x)-\dfrac{1}{\alpha}x-\ln(\alpha)+1$.

On a, pour tout $x>0$, $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\alpha}$.

x	0		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	

Donc φ admet un maximum en $x=\alpha$ et $\varphi(\alpha)=0$ donc pour tout $x>0$, $\varphi(x)\le 0$. (C) est en dessous de toutes ses tangentes sur $\left]0;+\infty\right[$.

Remarque : on dit que la fonction logarithme est concave sur $\left]0;+\infty\right[$.

Exercice 68.

Montrer que, pour tout $x>0$, $1-\dfrac{1}{x}\le\ln(x)\le x-1$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).

Solution

En reprenant les notations de l'exercice précédent, on a, pour $x>0$, $\varphi(x)\leq 0$, c'est-à-dire $\ln(x)\leq \frac{1}{\alpha}x+\ln(\alpha)-1$. Si $\alpha=1$ cette inégalité s'écrit $\ln(x)\leq x-1$.

Remarque : cette inégalité peut s'obtenir directement en étudiant la fonction $x\mapsto \ln(x)-x+1$.

Si on remplace x par $\frac{1}{x}$, on obtient :

$$\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}-1\right)\Leftrightarrow\left(-\ln(x)\leq\frac{1}{x}-1\right)\Leftrightarrow\left(\ln(x)\geq 1-\frac{1}{x}\right).$$

Remarque : on peut obtenir directement cette inégalité en étudiant la fonction $x\mapsto\ln(x)+\frac{1}{x}-1$.

Finalement, pour $x>0$, $\boxed{1-\frac{1}{x}\leq\ln(x)\leq x-1}$.

Exercice 69.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$. On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Vérifier que l'ensemble de définition de la fonction f est $\left]0;2\right[$.
2. Calculer la dérivée de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
4. Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (T).
5. Étudier brièvement la fonction f puis tracer la courbe (C) et sa tangente (T).

Solution

1. $\left(\frac{x}{2-x}>0\right)\Leftrightarrow(0<x<2)$ donc $\boxed{E_f=\left]0;2\right[}$.

2. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout $x\in E_f$, on pose $u(x)=\frac{x}{2-x}$, donc $f(x)=\ln(u(x))$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{(2-x)^2} \times \frac{(2-x)}{x} . \quad \boxed{f'(x) = \frac{2}{x(2-x)}} .$$

3. f est dérivable en 1 donc (C) admet une tangente au point d'abscisse 1 d'équation : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$ c'est à dire $\boxed{y = 2x - 2}$.

4. On pose, pour tout $x \in E_f$, $\varphi(x) = f(x) - (2x-2)$.

Il suffit d'étudier le signe de la fonction φ sur E_f.

Pour tout $x \in E_f$, on a : $\varphi'(x) = f'(x) - 2 = \dfrac{2}{x(2-x)} - 2 = \dfrac{2(x-1)^2}{x(2-x)}$.

Pour tout $x \in E_f$ et différent de 1, $\varphi'(x) > 0$. La fonction φ est strictement croissante sur E_f. Comme (T) est la tangente à (C) au point d'abscisse 1, on a : $\varphi(1) = 0$.

Si $0 < x < 1$ alors $\varphi(x) < 0$ et si $1 < x < 2$ alors $\varphi(x) > 0$.

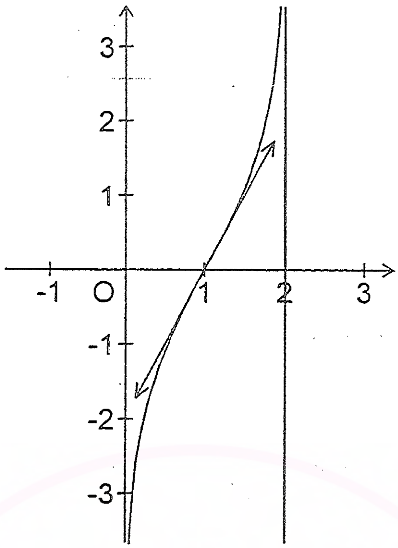
Conclusion :

- Sur $]0;1[$, la courbe (C) est en dessous de la droite (T).
- Sur $]1;2[$, la courbe (C) est au dessus de la droite (T).

Remarque : le point de coordonnée $(1,0)$ est un point d'inflexion (la courbe traverse la tangente).

5. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ donc les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales à la courbe (C).

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



✓ ***Position relative de la courbe et d'une asymptote***

Exercice 70.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ par $f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Montrer que la droite (D), d'équation $y=-\dfrac{x}{2}$, est une asymptote oblique puis étudier la position relative de (C) et de son asymptote (D).

Solution

Pour tout x de $\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$,

$$f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=-\frac{x}{2}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

On utilise le théorème des sur la limite d'une fonction composée.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{X\to1}\ln(X)=0$ (car ln est continue en 1) donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=0$. De même $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=0$.

On pose : $\varphi(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$. On a $f(x)=-\dfrac{x}{2}+\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$. La droite (D) d'équation $y=-\dfrac{x}{2}$

est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
La position relative de (C) et (D) s'obtient en étudiant le signe de $\varphi(x)$.

- Si $x \in \left]-\infty;0\right[$ alors $1-\dfrac{1}{x}>1$ donc $\varphi(x)>0$. (C) est au dessus de (D) sur $\left]-\infty;0\right[$.

- Si $x \in \left]1;+\infty\right[$ alors $1-\dfrac{1}{x}<1$ donc $\varphi(x)<0$. (C) est en dessous de (D) sur $\left]1;+\infty\right[$.

VI. *Suites et logarithmes*

*Exercice 71.***

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f. Montrer par récurrence que, pour tout entier n tel que $n \geq 1$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{u_n+v_n\ln(x)}{x^{n+1}}$ où (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_1=1$, $v_1=-1$ et pour tout $n\geq 1$, $u_{n+1}=v_n-(n+1)u_n$ et $v_{n+1}=-(n+1)v_n$.

3. Exprimer v_n en fonction de n puis montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $u_n=(-1)^{n+1}n!\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution

1. f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x}-\ln(x)}{x^2}=\boxed{\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}}$.

f' est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$. Pour tout x appartenant à $\left]0;+\infty\right[$,

$$f''(x)=\frac{-\dfrac{x^2}{x}-2x(1-\ln(x))}{x^4}=\boxed{\frac{-3+2\ln(x)}{x^3}}.$$

2. On pose $u_1=1$ et $v_1=-1$ et, pour tout $n\geq 1$, $u_{n+1}=v_n-(n+1)u_n$ et $v_{n+1}=-(n+1)v_n$.

Notons P_n la proposition : « $f^{(n)}(x) = \dfrac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}$ ».

$f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} = \dfrac{u_1 + v_1 \ln(x)}{x^{1+1}}$ donc P_1 est vraie.

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que P_n est vraie.

Pour tout x appartenant à $\left]0;+\infty\right[$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}$ donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et on a :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{v_n \dfrac{x^{n+1}}{x} - (n+1)x^n\left(u_n + v_n \ln(x)\right)}{\left(x^{n+1}\right)^2}.$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{v_n x^n - (n+1)x^n u_n - (n+1)x^n v_n \ln(x)}{x^{2n+2}}.$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{v_n - (n+1)u_n - (n+1)v_n \ln(x)}{x^{n+2}}.$$

Comme $u_{n+1} = v_n - (n+1)v_n$ et $v_{n+1} = -(n+1)v_n$, on a

$f^{(n+1)}(x) = \dfrac{u_{n+1} + v_{n+1}\ln(x)}{x^{n+2}}$ et P_{n+1} est vraie.

La proposition P_n est vraie au rang 1 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, $\boxed{f^{(n)}(x) = \dfrac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}}$.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on note P_n la proposition : « $v_n = (-1)^n \times n!$ ».

$(-1)^1 \times 1! = -1 = v_1$ donc P_1 est vraie.

On suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire $v_n = (-1)^n \times n!$.

$v_{n+1} = -(n+1)v_n = -(n+1)\times(-1)^n \times n! = (-1)^{n+1}\times(n+1)!$

donc P_{n+1} est vraie.

P_n est vraie au rang 1 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, $\boxed{v_n = (-1)^n \times n!}$.

On a donc $u_{n+1} = (-1)^n \times n! - (n+1)u_n$.

Pour tout entier naturel non nul n, on note P_n la proposition : « $u_n = (-1)^{n+1} \times n!\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$ ».

$(-1)^2 \times 1! \times 1 = 1 = u_1$ donc P_1 est vraie.

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n = (-1)^{n+1} \times n!\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

$$u_{n+1} = (-1)^n\, n! - (n+1)\, u_n \; .$$

$$u_{n+1} = (-1)^n\, n! - (n+1)\left[(-1)^{n+1} \times n!\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right].$$

$$u_{n+1} = (-1)^{n+2}\, n! + (-1)^{n+2} \times (n+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

$u_{n+1} = (-1)^{n+2} \times (n+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$. Donc P_{n+1} est vraie.

P_n est vraie au rang 1 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, $\boxed{u_n = (-1)^{n+1} \times n!\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}$.

*Exercice 72.***

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{\ln^n(x)}{x^2}$. On note C_n la courbe représentative de f_n, dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthogonal (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées). Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int_1^e f_n(x)\,dx$.

1. On pose $F(x) = -\frac{1+\ln(x)}{x}$. Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.
2. Montrer que : $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.
3. Calculer I_2, puis l'aire, en cm², du domaine compris entre les courbes C_1, C_2 et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
4. En utilisant la question 2, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{n!}I_n = 1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$.
5. En utilisant un encadrement de $\ln(x)$ sur $[1;e]$, montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq I_n \leq 1$.
6. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$.

Solution

1. $F(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$ donc $F'(x)=\dfrac{1-1-\ln(x)}{x^2}=\boxed{-\dfrac{\ln(x)}{x^2}}$.

On peut remarquer que $F'(x)=-f_1(x)$ donc

$I_1=\int_1^e \dfrac{\ln(x)}{x^2}\,dx=[-F(x)]_1^e=-F(e)+F(1)=\boxed{1-\dfrac{2}{e}}$.

2. $I_{n+1}=\int_1^e \dfrac{\ln^{n+1}(x)}{x^2}\,dx$. On pose $u(x)=\ln^{n+1}(x)$ et $v(x)=-\dfrac{1}{x}$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $[1;e]$. On a $u'(x)=(n+1)\dfrac{\ln^n(x)}{x}$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x^2}$. u' et v' sont continues sur $[1;e]$ donc, en utilisant une intégration par parties, on a :

$$I_{n+1}=\int_1^e \frac{\ln^{n+1}(x)}{x^2}\,dx=\left[-\frac{\ln^{n+1}(x)}{x}\right]_1^e+(n+1)\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x^2}\,dx.$$

$$\boxed{I_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n}.$$

3. $I_2=-\dfrac{1}{e}+2I_1=-\dfrac{1}{e}+2-\dfrac{4}{2}=\boxed{2-\dfrac{5}{e}}$. Pour tout x appartenant à $[1;e]$, $f_1(x)-f_2(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}-\dfrac{\ln^2(x)}{x^2}=\dfrac{(1-\ln(x))\ln(x)}{x^2}$.

$(1\le x\le e)\Rightarrow(0\le \ln(x)\le 1)\Rightarrow(f_1(x)-f_2(x)\ge 0)$.

$\int_1^e (f_1(x)-f_2(x))\,dx=\int_1^e f_1(x)\,dx-\int_1^e f_2(x)\,dx=I_1-I_2=\dfrac{3}{e}-1>0$.

$1\,u.a=20\,\text{cm}^2$. L'aire, en cm^2, du domaine compris entre les courbes C_1, C_2 et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ est :

$$\boxed{A=20\left(\frac{3}{e}-1\right)\text{cm}^2}.$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note $P(n)$ la proposition :

$$\text{« } \frac{1}{n!}I_n=1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) \text{ ».}$$

Comme $1!=1$ et $I_1=1-\dfrac{2}{e}$, $P(1)$ est vraie.

Supposons, pour un certain entier naturel non nul n, que $P(n)$ soit vraie. D'après la question 2, $I_{n+1}=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n$ donc

$$\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)!e}+\frac{1}{n!}I_n.$$

$$\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1}=1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right).$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul.

$$\boxed{\frac{1}{n!}I_n=1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)}$$

5. Pour tout x appartenant à $[1;e]$, on a :

$$(1\le x\le e)\Rightarrow(0\le\ln(x)\le1)\Rightarrow(0\le\ln^n(x)\le1)\Rightarrow\left(0\le\frac{\ln^n(x)}{x^2}\le\frac{1}{x^2}\right)$$

donc $0\le\int_1^e f_n(x)\,dx\le\int_1^e\frac{1}{x^2}dx$.

Comme $\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e=1-\frac{1}{e}<1$, on a $\boxed{0\le I_n\le1}$.

6. D'après la question précédente, on a $0\le I_n\le1$.

Ainsi, $0\le\frac{1}{n!}I_n\le\frac{1}{n!}\le\frac{1}{n}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n!}I_n=0$.

Comme $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}=e\left(1-\frac{1}{n!}I_n\right)$, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e}.$$

VII. *Primitives et logarithme*

Exercice 73.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par $f(x)=\frac{1}{x-1}$

1. Montrer que f admet des primitives sur $I=]-\infty;1[$

2. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

Solution

1. f est une fonction rationnelle, qui est définie sur $I=]-\infty;1[$ Elle est continue sur I donc f admet des primitives sur I.

2. Pour tout $x \in I$, on a $x-1<0$. Si on pose $u(x)=1-x$ alors $u(x)>0$ et $f(x)=\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. On en déduit qu'une primitive de la fonction f sur I est la fonction F, définie par : $\boxed{F(x)=\ln(1-x)}$.

Exercice 74.

Soit f définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{5}\right[\cup\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{5x-1}$.

1. Montrer que f admet des primitives sur $I=\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$.
2. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

Solution

1. La fonction f est une fonction rationnelle qui est définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{5}\right[\cup\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$. Elle est continue sur I donc f admet des primitives sur I.

2. Pour tout $x \in I$, on a $5x-1>0$. Si on pose $u(x)=5x-1$ alors $u(x)>0$ et $f(x)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{5}{5x-1}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. On en déduit qu'une primitive de la fonction f sur I est la fonction F, définie par : $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{5}\ln(5x-1)}$.

Exercice 75.

Soit f définie sur $\left]-\infty;\frac{7}{4}\right[\cup\left]\frac{7}{4};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{4x-7}$.

1. Montrer que f admet des primitives sur $I=[0;1]$.
2. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

Solution

1. La fonction f est une fonction rationnelle qui est définie sur $\left]-\infty;\frac{7}{4}\right[\cup\left]\frac{7}{4};+\infty\right[$. Elle est continue sur I donc f admet des primitives sur I.

2. Pour tout $x \in I$, $0\le x\le 1$ donc $-7\le 4x-7\le -3$. Si on pose

$u(x) = 7 - 4x$ alors $u(x) > 0$ et $f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{-4}{7-4x} = \frac{1}{4} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$.

On en déduit qu'une primitive de la fonction f sur I est la fonction F, définie par : $\boxed{F(x) = \frac{1}{4}\ln(7-4x)}$.

Exercice 76.

Soit f la fonction définie sur $\left[2;+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{3x^2}{x^3-3}$.

1. Montrer que f admet des primitives sur $I = \left[2;+\infty\right[$.
2. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

Solution

1. Sur $I = \left[2;+\infty\right[$, la fonction f est une fonction rationnelle donc elle est continue sur I et admet des primitives sur I.
2. Pour tout $x \in I$, $x \geq 2$ donc $x^3 - 3 \geq 5$. Si on pose $u(x) = x^3 - 3$ alors $u(x) > 0$ et $u'(x) = 3x^2$ donc $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

On en déduit qu'une primitive de la fonction f sur I est la fonction F, définie par : $\boxed{F(x) = \ln\left(x^3-3\right)}$.

Exercice 77.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x^3+x^2-x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f puis montrer qu'elle admet des primitives sur $I = \left]-\infty;-2\right[$.
2. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

Solution

1. On a $x^3 + x^2 - x + 2 = (x+2)\left(x^2 - x + 1\right)$ où $x^2 - x + 1$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif (-3). Pour tout réel x, $x^2 - x + 1 > 0$. L'ensemble de définition de f est donc $\boxed{E_f = \left]-\infty;-2\right[\cup \left]-2;+\infty\right[}$.
2. Sur $I = \left]-\infty;-2\right[$, la fonction rationnelle f est continue, elle

admet donc des primitives.

3. Pour tout $x \in I$, $x+2<0$ et $x^2-x+1>0$ donc $x^3+x^2-x+2<0$. Si on pose $u(x)=-x^3-x^2+x-2$ alors $u(x)>0$ et $u'(x)=-3x^2-2x+1$ donc $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

On en déduit qu'une primitive de la fonction f sur I est la fonction F, définie par : $\boxed{F(x)=\ln\left(-x^3-x^2+x-2\right)}$.

Exercice 78.

Soit f la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

1. Montrer que f admet des primitives sur $I=\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

Solution

1. Pour tout $x \in I$, on a $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \sin(x) \le 1$ donc f est bien définie sur l'intervalle I. De plus, f, quotient de deux fonctions continues sur I, est continue sur I. On en déduit que f admet des primitives sur I.

2. Pour tout $x \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(x)>0$ et $\sin'(x)=\cos(x)$.

Une primitive de f sur $I=\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ est la fonction F définie par :

$$\boxed{F(x)=\ln(\sin(x))}.$$

Exercice 79.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\tan(x)$.

1. Montrer que f admet des primitives sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

2. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

Solution

1. On sait que la fonction tangente est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, elle est donc continue sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ et admet des primitives sur I.

2. $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Pour tout $x\in I$, $\cos(x)>0$ et $\cos'(x)=-\sin(x)$ donc $f(x)=-\dfrac{\cos'(x)}{\cos(x)}$. Une primitive de f sur I est donc la fonction F définie par : $\boxed{F(x)=-\ln(\cos(x))=\ln\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)}$.

Exercice 80.*

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$

1. Montrer que f admet des primitives sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$
2. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

Solution

1. Pour tout x appartenant à I, on a $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin(x)<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos(x)\leq 1$ donc $-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}<\sin(x)-\cos(x)<0$.

La fonction f est un quotient de deux fonctions continues sur I ; son dénominateur ne s'annulant pas sur I, on en déduit la continuité de f et l'existence de primitives de f sur I.

2. Pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$, on pose $u(x)=\cos(x)-\sin(x)$.

On a $u(x)>0$ et $u'(x)=-\sin(x)-\cos(x)$ donc $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de la fonction f sur I est donc la fonction F définie par : $\boxed{F(x)=\ln(u(x))=\ln(\cos(x)-\sin(x))}$.

Exercice 81.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

1. Montrer que f admet des primitives sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$
2. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

Solution

1. La fonction f, quotient de deux fonctions continues sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$\cos^2(x)$, ne s'annulant pas sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on pose $u(x) = \cos(x)$ d'où $u'(x) = -\sin(x)$. $f(x)$ s'écrit alors $f(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$. Donc une primitive de f sur I, est la fonction F définie par : $\boxed{F(x) = \frac{1}{\cos(x)}}$.

Exercice 82.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$.

1. Montrer que f admet des primitives sur $I = \left]1;+\infty\right[$.
2. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

Solution

1. La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est continue sur $I = \left]1;+\infty\right[$ et ne s'annule jamais sur cet intervalle. La fonction f est donc continue sur I et elle admet des primitives sur I.

2. Pour tout $x \in I$, si on pose $u(x) = \ln(x)$ alors $u(x) > 0$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$. On peut donc écrire $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ et une primitive de f sur I, est la fonction F définie par : $\boxed{F(x) = \ln(\ln(x))}$.

Exercice 83.

On pose, pour tout $x > 1$, $f(x) = \frac{5x^2 - 16x - 16}{2(x-1)(2x+1)(x+2)^2}$.

1. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\left]1;+\infty\right[$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{2(x-1)}$$

3. Montrer que f admet des primitives sur $\left]1;+\infty\right[$. Déterminer la primitive F de f sur $\left]1;+\infty\right[$ vérifiant $F(2) = \frac{\ln(5)-1}{2}$.

4. On pose, pour tout $n \geq 2$, $u_n = F(n)$. Exprimer u_n en fonction de n pour $n \geq 2$.

5. Montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante à partir du rang quatre.

6. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Solution

1. Pour $x > 1$, on a $x - 1 > 0$, $2x + 1 > 0$ et $(x+2)^2 > 0$ donc, sur $\left]1; +\infty\right[$, $f(x)$ est du signe du numérateur $5x^2 - 16x - 16$.

$\Delta = 24^2$, $x_1 = -\dfrac{4}{5}$ et $x_1 = 4$. Ainsi, $5x^2 - 16x - 16$ est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur.

Si $x \in \left]1; 4\right[$ alors $f(x) < 0$ et si $x \in \left]4; +\infty\right[$ alors $f(x) > 0$.

2. Pour tout $x > 1$, on a :

$$\frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{2(x-1)} =$$

$$\frac{2a(x-1)(x+2)^2 + 2b(x-1)(2x+1) + c(2x+1)(x+2)^2}{2(x-1)(2x+1)(x+2)^2} =$$

$$\frac{2ax^3 + 6ax^2 - 8a + 4bx^2 - 2bx - 2b + 2cx^3 + 9cx^2 + 12cx + 4c}{2(x-1)(2x+1)(x+2)^2} =$$

$$\frac{(2a+2c)x^3 + (6a+4b+9c)x^2 + (12c-2b)x - 8a - 2b + 4c}{2(x-1)(2x+1)(x+2)^2}$$

Par identification, on a $f(x) = \dfrac{a}{2x+1} + \dfrac{b}{(x+2)^2} + \dfrac{c}{2(x-1)}$ si, et seulement si, $\begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ 6a + 4b + 9c = 5 \\ 12c - 2b = -16 \\ -8a - 2b + 4c = -16 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ 6a + 4b + 9c = 5 \\ 12c - 2b = -16 \\ -8a - 2b + 4c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ 4b + 3c = 5 \\ 12c - 2b = -16 \\ 12c - 2b = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b - 6c = 8 \\ 4b + 3c = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 6c + 8 \\ 32 + 24c + 3c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 6c + 8 \\ 27c = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $x > 1$, $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{2}{(x+2)^2} - \dfrac{1}{2(x-1)}}$.

3. La fonction f, fonction rationnelle, est continue sur son ensemble de définition donc elle admet des primitives sur $\left]1;+\infty\right[$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x+1} - 2 \times \frac{-1}{(x+2)^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)}.$$

Pour $x > 1$, on a $x - 1 > 0$ et $2x + 1 > 0$.

En notant F une primitive de f sur $\left]1;+\infty\right[$, on a :

$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(2x+1) - \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{2}\ln(x-1) + C$ où C est une constante.

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) - \frac{2}{x+2} + C.$$

$F(2) = \dfrac{\ln(5) - 1}{2}$ implique $C = 0$ donc $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right) - \dfrac{2}{x+2}}$.

4. $u_n = F(n)$ donc $\boxed{u_n = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2n+1}{n-1}\right) - \dfrac{2}{n+1}}$.

5. La fonction F est une primitive de f sur $\left]1;+\infty\right[$ donc, pour tout réel x appartenant à $\left]1;+\infty\right[$, on a $F'(x) = f(x)$. D'après 1, on sait que si $x \in \left]4;+\infty\right[$ alors $f(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\left[4;+\infty\right[$. Pour tout $n \geq 4$, comme $n < n+1$, on a $F(n) < F(n+1)$, c'est-à-dire $u_n < u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante à partir du rang 4.

6. On utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = 2$ et $\lim\limits_{X\to 2} \ln(X) = 2$ (car ln est continue en 2) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right) = \ln(2)$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x+2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\ln(2)}{2}}$.

Exercice 84.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x^2-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Montrer que f est une fonction impaire et étudier ses variations.

2. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3. Calculer la dérivée de la fonction g définie par :

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1).$$

En déduire la primitive F de f sur $\left]1;+\infty\right[$ telle que $F(\sqrt{2}) = 0$.

Solution

1. En posant $u(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $v(x) = \frac{x}{x^2-1}$, on a :

$f(x) = v(x) + \ln(u(x))$. $(u(x) > 0) \Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\right)$.

Comme la fonction v est définie pour tout réel différent de -1 et 1, l'ensemble de définition de la fonction f est :

$$\boxed{E_f = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[}.$$

- Il est clair que E_f est centré en 0. Pour tout $x \in E_f$,

$$f(-x) = \frac{-x}{x^2-1} + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = -\left[\frac{x}{x^2-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = -f(x).$$

La fonction f est impaire.

Cela permet d'étudier f sur l'ensemble $E = \left]1;+\infty\right[$.

- f est dérivable sur E_f. Pour tout $x > 1$, $f'(x) = v'(x) + \frac{u'(x)}{u(x)}$.

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2} + \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2} + \frac{-2}{x^2-1}.$$

$$f'(x) = \frac{-x^2-1+2x^2+2}{\left(x^2-1\right)^2}. \quad \boxed{f'(x) = \frac{-3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}}.$$

Pour tout $x \in E$, $f'(x) < 0$. La fonction f est strictement décroissante sur E.

- $\lim\limits_{x \to 1^+} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(u(x)) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} v(x) = +\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 1^+} [v(x) + \ln(u(x))] = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty}.$$

$x = 1$ est une équation d'une asymptote verticale à la courbe C .

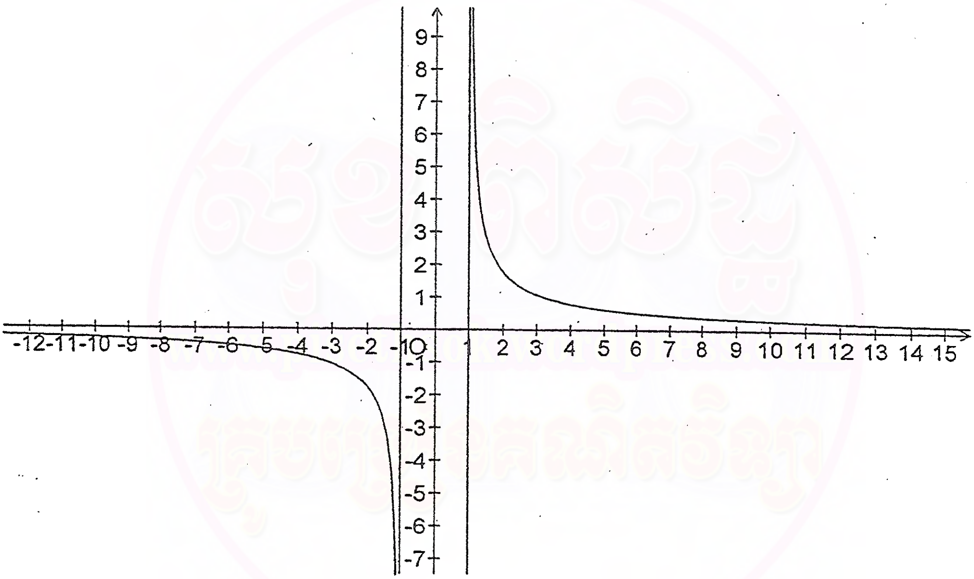
- $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(u(x)) = 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 0$. Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} [v(x) + \ln(u(x))] = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}.$$

$y = 0$ est une équation d'une asymptote verticale à la courbe C .

2.



3. g est dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$ et, pour tout x appartenant à $\left]1;+\infty\right[$, $g'(x) = \ln(x+1) + 1 - \ln(x-1) - 1 = \ln(x+1) - \ln(x-1)$.

$$\boxed{g'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}.$$

g est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ sur $\left]1;+\infty\right[$.

On pose, pour tout x appartenant à $\left]1;+\infty\right[$, $w(x) = x^2 - 1$.

$w(x) > 0$ et $v(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{w'(x)}{w(x)}$ donc une primitive de v sur $\left]1;+\infty\right[$ est la fonction V définie par $V(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 - 1\right)$.

Les primitives de la fonction f sur $\left]1;+\infty\right[$ sont les fonctions définies sur $\left]1;+\infty\right[$ de la forme $x \mapsto V(x)+g(x)+K$ où K est une constante réelle.

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)+(x+1)\ln(x+1)-(x-1)\ln(x-1)+K\,.$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)+x\ln(x+1)+\ln(x+1)-x\ln(x-1)+\ln(x-1)+K$$

$$\boxed{F(x)=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-1\right)+x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+K}\,.$$

Pour déterminer la valeur de la constante K, on utilise $F\left(\sqrt{2}\right)=0$.

$$\left(F\left(\sqrt{2}\right)=0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-1\right)+\sqrt{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)+K=0\right).$$

$$\left(F\left(\sqrt{2}\right)=0\right)\Leftrightarrow\left(K=\sqrt{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right).$$

$$\left(F\left(\sqrt{2}\right)=0\right)\Leftrightarrow\left(K=\sqrt{2}\ln\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right]\right)\Leftrightarrow\left(K=2\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right).$$

Donc, pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$,

$$\boxed{F(x)=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-1\right)+x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+2\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)}\,.$$

VIII. *Axe et centre de symétrie*

✓ *Axe de symétrie*

Exercice 85.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left(\frac{2x^2+8x+6}{2x^2+8x+9}\right)$. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que la droite (Δ) d'équation $x=-2$ est un axe de symétrie de C_f.
3. Donner l'allure de C_f et tracer (Δ).

Solution

1. Le discriminant de $2x^2+8x+9$ est -8. Pour tout réel x,

$2x^2+8x+9>0$. Le discriminant de $2x^2+8x+6$ est 16 et ses racines sont -1 et -3. D'après le théorème sur le signe du trinôme, on a : $2x^2+8x+6>0$ si, et seulement si, $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$.

$\dfrac{2x^2+8x+6}{2x^2+8x+9}>0$ si, et seulement si, $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$.

$$\boxed{E_f=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-1;+\infty\right[}.$$

2. E_f est centré en -2.

$(x\in E_f)\Leftrightarrow(x<-3 \text{ ou } x>-1)\Leftrightarrow(-x>3 \text{ ou } -x<1)$.

$(x\in E_f)\Leftrightarrow(-4-x>-1 \text{ ou } -4-x<-3)\Leftrightarrow(-4-x\in E_f)$.

Pour tout x appartenant à E_f,

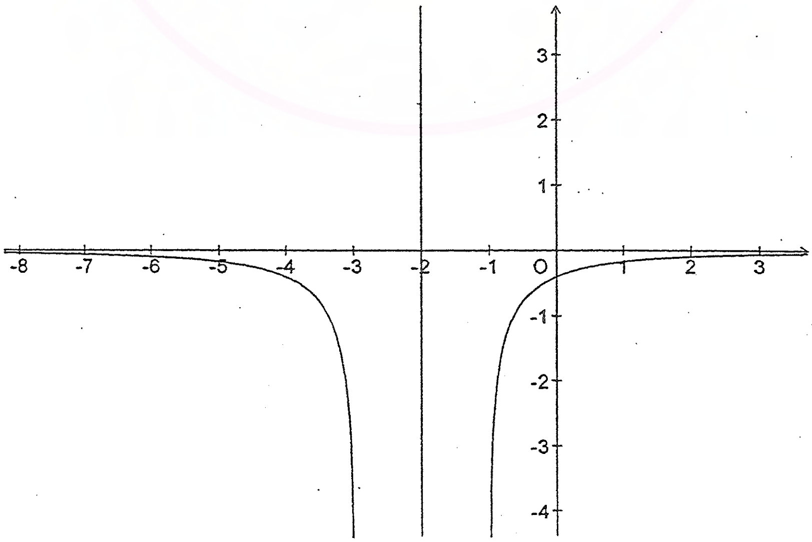
$$f(x)=\ln\left(\frac{2x^2+8x+9-3}{2x^2+8x+9}\right)=\ln\left(1-\frac{3}{2x^2+8x+9}\right).$$

$$f(-4-x)=\ln\left(1-\frac{3}{2(-4-x)^2+8(-4-x)+9}\right).$$

$$f(-4-x)=\ln\left(1-\frac{3}{2x^2+16x+32-32-8x+9}\right)=\ln\left(1-\frac{3}{2x^2+8x+9}\right).$$

$f(-4-x)=f(x)$. La droite (Δ) d'équation $x=-2$ est un axe de symétrie de C_f.

3.



Exercice 86.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x^2+8x+6}{2x^2+8x+9}\right)$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Déterminer l'ensemble de définition de f.

En utilisant un changement de repère, montrer que la droite (Δ) d'équation $x=-2$ est un axe de symétrie de C.

Solution

On a vu dans l'exercice précédent que : $\boxed{E_f=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-1;+\infty\right[}$.

On pose $\Omega\left(-2,0\right)$. On définit un nouveau repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $\left(x,y\right)$ les coordonnées du point M dans l'ancien repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et $\left(X,Y\right)$ les coordonnées du point M dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On exploite la relation vectorielle $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ pour obtenir :

$$\boxed{\begin{cases}x=-2+X\\ y=Y\end{cases}}$$

$\left(M(x,y)\in C\right)\Leftrightarrow\left(y=f(x)\text{ et } x\in E_f\right)$.

$\left(M(x,y)\in C\right)\Leftrightarrow\left(Y=f(X-2)\text{ et } -2+X\in E_f\right)$.

$$\left(M(x,y)\in C\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}Y=\ln\left(\dfrac{2(X-2)^2+8(X-2)+6}{2(X-2)^2+8(X-2)+9}\right)\\ \text{et } X\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[\end{array}\right).$$

$$\left(M(x,y)\in C\right)\Leftrightarrow\left(Y=\ln\left(\dfrac{2X^2-2}{2X^2+1}\right)\text{et } X\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[\right).$$

On définit la fonction g sur $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ par $g(x)=\ln\left(\dfrac{2x^2-2}{2x^2+1}\right)$. On note $E_g=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

E_g est centré en 0 et, pour tout x appartenant à E_g, $g(-x)=g(x)$.

La fonction g est paire. Le graphe de la fonction g admet l'axe des ordonnées, dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$, comme axe de symétrie. Une équation de cet axe est $X=0$ dans $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ et $x=-2$ dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

✓ *Centre de symétrie*

Exercice 87.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ par $f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$. On note C la courbe représentative de f dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Montrer, en utilisant un changement de repère, que le point $\Omega\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie de C.

2. Étudier rapidement f, tracer la courbe C et placer le point Ω.

Solution

1. Soit $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ le nouveau repère. On a $\Omega\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$ dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On note (x,y) les coordonnées de M dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$.

$$\left(\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)\Leftrightarrow\left(x\vec{i}+y\vec{j}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{4}\vec{j}+X\vec{i}+Y\vec{j}\right).$$

$$\left(\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)\Leftrightarrow\left(x\vec{i}+y\vec{j}=\left(X+\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(Y-\frac{1}{4}\right)\vec{j}\right).$$

$$\left(\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x=X+\dfrac{1}{2}\\ y=Y-\dfrac{1}{4}\end{cases}\right).$$

$$(M\in C)\Leftrightarrow\left(y=f(x)\text{ et }x\in E_f\right).$$

$$(M\in C)\Leftrightarrow\left(Y-\frac{1}{4}=f\left(X+\frac{1}{2}\right)\text{ et }X+\frac{1}{2}\in E_f\right).$$

$$(M\in C)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}Y-\dfrac{1}{4}=\ln\left(\dfrac{X+\frac{1}{2}-1}{X+\frac{1}{2}}\right)-\dfrac{X+\frac{1}{2}}{2}\\ \text{et } X\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[\end{array}\right).$$

$$(M\in C)\Leftrightarrow\left(Y=\ln\left(\frac{2X-1}{2X+1}\right)-\frac{2X+1}{4}+\frac{1}{4}\text{ et }X\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right).$$

$$(M\in C)\Leftrightarrow\left(Y=\ln\left(\frac{2X-1}{2X+1}\right)-\frac{X}{2}\text{ et }X\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right).$$

On pose, pour tout x appartenant à $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $g(x)=\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)-\frac{x}{2}$. Notons $E_g=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

E_g est centré en 0, c'est-à-dire si $x\in E_g$ alors $-x\in E_g$.

Pour tout x appartenant à $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$,

$$g(-x)=\ln\left(\frac{-2x-1}{-2x+1}\right)-\frac{-x}{2}=\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)+\frac{x}{2}=-\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)+\frac{x}{2}.$$

Finalement, $g(-x)=-g(x)$.

g est une fonction impaire donc Ω, origine du repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, est un centre de symétrie de la courbe C .

2. La fonction f est continue et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

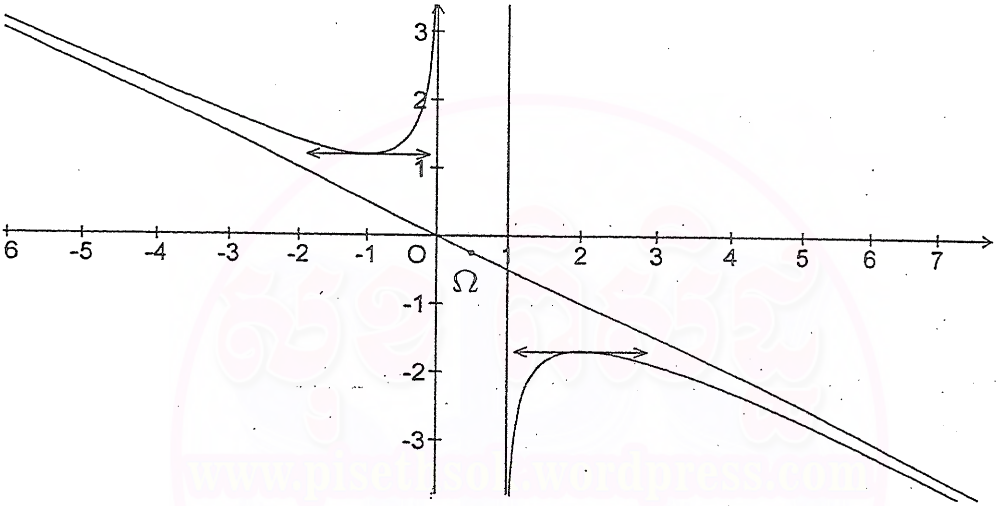
Pour tout $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{2}$.

$$\boxed{f'(x)=\frac{(2-x)(x+1)}{2x(x-1)}}.$$

Pour tout x appartenant à $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $2x(x-1)>0$. Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $(2-x)(x+1)$.

- Si $x\in]-\infty;-1[$ alors $f'(x)<0$. f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$.
- Si $x\in]-1;0[$ alors $f'(x)>0$. f est strictement croissante sur $]-1;0[$.
- Si $x\in]1;2[$ alors $f'(x)>0$. f est strictement croissante sur $]1;2[$.
- Si $x\in]2;+\infty[$ alors $f'(x)<0$. f est strictement décroissante sur $]2;+\infty[$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. Les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ sont des asymptotes verticales. De plus, il est facile de montrer que la droite d'équation $y = -\frac{x}{2}$ est une asymptote oblique ($\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \left(-\frac{x}{2}\right)\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - \left(-\frac{x}{2}\right)\right) = 0$).



Exercice 88.

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ pour x appartenant à $E_f = \left]-\infty;0\right[\cup \left]1;+\infty\right[$ et C sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Montrer que le point $\Omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie de C.

Solution

- *Méthode 1.* Montrons que E_f est centré en $\frac{1}{2}$.

$(x \in E_f) \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ou } x > 1) \Leftrightarrow (-x > 0 \text{ ou } -x < -1)$.

$(x \in E_f) \Leftrightarrow (1 - x > 1 \text{ ou } 1 - x < 0) \Leftrightarrow \left((1-x) \in E_f\right)$.

Ainsi, E_f est centré en $\frac{1}{2}$. Pour tout réel x tel que $\frac{1}{2} + x \in E_f$,

$$f\left(\frac{1}{2}+x\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)=-\frac{\frac{1}{2}+x}{2}+\ln\left(\frac{\frac{1}{2}+x-1}{\frac{1}{2}+x}\right)-\frac{\frac{1}{2}-x}{2}+\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-x-1}{\frac{1}{2}-x}\right).$$

$$f\left(\frac{1}{2}+x\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)=-\frac{1+2x}{4}+\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)-\frac{1-2x}{4}+\ln\left(\frac{-2x-1}{1-2x}\right).$$

$$f\left(\frac{1}{2}+x\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)=-\frac{1+2x}{4}+\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)-\frac{1-2x}{4}-\ln\left(\frac{2x-1}{1+2x}\right).$$

$$f\left(\frac{1}{2}+x\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)=-\frac{1}{2}.$$

Donc $\Omega\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie de la courbe C.

- *Méthode 2.*

Pour tout réel x appartenant à E_f, on a :

$$f(1-x)+f(x)=-\frac{1-x}{2}+\ln\left(\frac{1-x-1}{1-x}\right)-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

$$f(1-x)+f(x)=-\frac{1-x+x}{2}+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

$$f(1-x)+f(x)=-\frac{1}{2}.$$

Donc $\Omega\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie de la courbe C.

IX. *Logarithme décimal*

*Exercice 89.****

Nombre de chiffres d'un entier naturel.

Si n est un entier naturel, on note $C(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Déterminer $C(385243)$.
2. Evaluer $C(n)$ en fonction de $\log(n)$.
3. Déterminer le nombre de chiffres des entiers suivants :

$a=9^{(9^9)}$; $b=11^{(9^9)}$; $c=2^{86242}\left(2^{86241}-1\right)$.

Solution

1. $C(385243)=6$

$$385243=3\times10^5+8\times10^4+5\times10^3+2\times10^2+4\times10^1+3\times10^0.$$

$C(385243) = 5+1 = 6$. Il n'y a donc aucun problème pour déterminer $C(n)$ si on connaît l'écriture décimale de n. Le but du problème est la détermination de $C(n)$ quand on ne connaît pas l'écriture décimale de n.

2. Soit n un entier naturel non nul.

Il existe $p+1$ entiers, a_0, a_1, ..., a_p pris dans l'ensemble $[\![0;9]\!]$ tels que $a_p \neq 0$ et $n = a_p \times 10^p + a_{p-1} \times 10^{p-1} + \ldots + a_1 \times 10^1 + a_0$.

Il est clair que sous cette forme on a : $C(n) = p+1$ (1).

On peut écrire : $n = 10^p \left(a_p + \dfrac{a_{p-1}}{10} + .. + \dfrac{a_1}{10^{p-1}} + \dfrac{a_0}{10^p} \right) = 10^p \times N$.

$N = a_p + \dfrac{a_{p-1}}{10} + .. + \dfrac{a_1}{10^{p-1}} + \dfrac{a_0}{10^p}$. Comme $a_p \neq 0$ on a $1 \leq N < 10$.

Ainsi, $\log(1) \leq \log(N) < \log(10)$ c'est-à-dire $0 \leq \log(N) < 1$.

$\log(n) = \log(10^p \times N) = \log(10^p) + \log(N) = p + \log(N)$.

On a $p \leq p + \log(N) < p+1$, c'est-à-dire $p \leq \log(n) < p+1$, et donc $E(\log(n)) = p$ (2).

De (1) et (2) on déduit la relation $\boxed{C(n) = E(\log(n)) + 1}$.

3. *Applications.*

- $a = 9^{(9^9)}$. Le nombre est trop grand pour qu'une calculatrice nous donne son logarithme décimal. $\log(a) = 9^9 \log(9)$. La calculatrice nous donne $369693099{,}6 < \log(a) < 369693099{,}7$ donc $E(\log(a)) = 369693099$ et on a $\boxed{C(a) = E(\log(a)) + 1 = 369693100}$.

- $b = 11^{(9^7)}$.

$\log(b) = 9^7 \log(11)$ et $E(\log(b)) = 4980948$ donc $\boxed{C(b) = 4980949}$.

- $c = 2^{86242}\left(2^{86241} - 1\right)$. Il est difficile d'évaluer $\log\left(2^{86241} - 1\right)$.

$c = 2^{86242}\left(2^{86241} - 1\right) = 2^{172483} - 2^{86242}$.

On va montrer que $C(c) = C\left(2^{172483}\right)$.

$\log\left(2^{172483}\right) = 172483 \times \log(2)$ et $\log\left(2^{86242}\right) = 86242 \times \log(2)$.

$E\left(\log\left(2^{172483}\right)\right) = 51922$ et $E\left(\log\left(2^{86242}\right)\right) = 25961$.

Donc $C\left(2^{172483}\right) = 51923$ et $C\left(2^{86242}\right) = 25962$.

On soustrait un nombre de 25962 chiffres à un nombre de 51923 chiffres, le résultat est toujours un nombre de 51923 chiffres dans le cas où le chiffre le plus significatif du plus grand nombre est strictement plus grand que 1. Détermination du chiffre le plus significatif de 2^{172483}.

On a $51922.55 \leq 172483 \log(2) < 51922.56$

donc $10^{51922} \times 10^{0.55} < 2^{172483} < 10^{51922} \times 10^{0.56}$

d'où $3.54 \times 10^{51922} < 2^{172483} < 3.64 \times 10^{51922}$.

Le chiffre le plus significatif de 2^{172483} est 3 donc

$$\boxed{C(c) = C\left(2^{172483}\right) = 51923}.$$

Exercice 90.

PH d'une solution aqueuse.

L'acidité d'une solution aqueuse est mesurée par son pH.

$pH = -\log([H_3O^+])$ où $[H_3O^+]$ désigne la concentration d'ions H_3O^+ (en mole.L^{-1}).

1. Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution neutre ($pH = 7$) ?

2. Si la concentration en ions H_3O^+ est multipliée par 10 que devient son pH ?

3. La concentration (en mole.L^{-1}) d'une solution est comprise entre 0.1 (solution très acide) et 10^{-14} (solution très basique). Quelles sont les valeurs extrêmes du pH ?

Solution

1. $(pH = 7) \Leftrightarrow \left(-\log\left([H_3O^+]\right) = 7\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{\ln\left([H_3O^+]\right)}{\ln(10)} = -7\right)$.

$(pH = 7) \Leftrightarrow \left(\ln\left([H_3O^+]\right) = \ln\left(10^{-7}\right)\right)$. $\boxed{pH = 7 \Leftrightarrow [H_3O^+] = 10^{-7}}$.

2. On multiplie la concentration en ions H_3O^+ par 10.

$$-\log\left(10 \times [H_3O^+]\right) = -\frac{\ln\left(10 \times [H_3O^+]\right)}{\ln(10)} = -\frac{\ln(10)}{\ln(10)} - \frac{\ln\left([H_3O^+]\right)}{\ln(10)}$$

$-\log\left(10 \times [H_3O^+]\right) = -1 - \log\left([H_3O^+]\right)$. Si la concentration en ions H_3O^+ est multipliée par 10 alors le pH est diminué de 1.

3. Solution très acide :

$$pH = -\log(0.1) = -\frac{\ln(10^{-1})}{\ln(10)} = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} \text{ soit } \boxed{pH = 1}.$$

Solution très basique :

$$pH = -\log(10^{-14}) = -\frac{\ln(10^{-14})}{\ln(10)} = 14 \times \frac{\ln(10)}{\ln(10)} \text{ soit } \boxed{pH = 14}.$$

On obtient $\boxed{1 \leq pH \leq 14}$.

X. *Problèmes*

Exercice 91.

Étude de la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition, E_f, de la fonction f.

2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de E_f.

3. Déduire de la question précédente la présence de deux asymptotes à la courbe C.

4. Montrer que C admet une asymptote oblique, (D), quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Donner une équation cartésienne de la droite (D). Étudier la position relative de la courbe C et de la droite (D).

5. Déterminer la dérivée de la fonction f.

6. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in E_f$.

7. Déterminer les variations de la fonction f.

8. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

9. Montrer que $\Omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie de la courbe C.

10. Tracer la courbe C, ainsi que ses asymptotes et son centre de symétrie.

Solution

1. $\left(\frac{x-1}{x} > 0\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty; 0\right[\cup \left]1; +\infty\right[\right)$.

$$\boxed{E_f = \left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[}.$$

2. Limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

On utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{X\to 1}\ln(X)=\ln(1)=0$ (car ln continue en 1) donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=0$. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$.

- Limite de la fonction f en 0^-.

On utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty}.$$

- Limite de la fonction f en 1^+.

On utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\ln(X)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty}.$$

3. On déduit de la question 2 que les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ sont des asymptotes verticales à C.

4. Cette question est traitée dans l'exercice 70.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=0$ donc la droite (D), d'équation $y=-\dfrac{x}{2}$, est une asymptote oblique à la courbe C.

C est au dessus de (D) sur $\left]-\infty;0\right[$ et en dessous de (D) sur $\left]1;+\infty\right[$.

5. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition E_f.

Pour tout $x\in E_f$, on pose $u(x)=1-\dfrac{1}{x}$. On a $f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln(u(x))$

donc $f'(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. $f'(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$.

Pour tout $x\in E_f$, on a $\boxed{f'(x)=\dfrac{(x+1)(2-x)}{2x(x-1)}}$.

6. Pour tout $x\in E_f$, $x(x-1)>0$, donc $2x(x-1)>0$. Le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de son numérateur, c'est-à-dire

$(x+1)(2-x)$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 2.

- Si $x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]2;+\infty\right[$ alors $f'(x) < 0$.
- Si $x \in \left]-1;0\right[\cup \left]1;2\right[$ alors $f'(x) > 0$.
- $f'(-1) = f'(2) = 0$.

7. La question précédente permet de conclure.

f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-1\right]$ et sur $\left[2;+\infty\right[$ et strictement croissante sur $\left[-1;0\right[$ et sur $\left]1;2\right]$.

Remarque : La fonction f n'est pas strictement croissante sur $\left]-1;0\right[\cup \left]1;2\right[$.

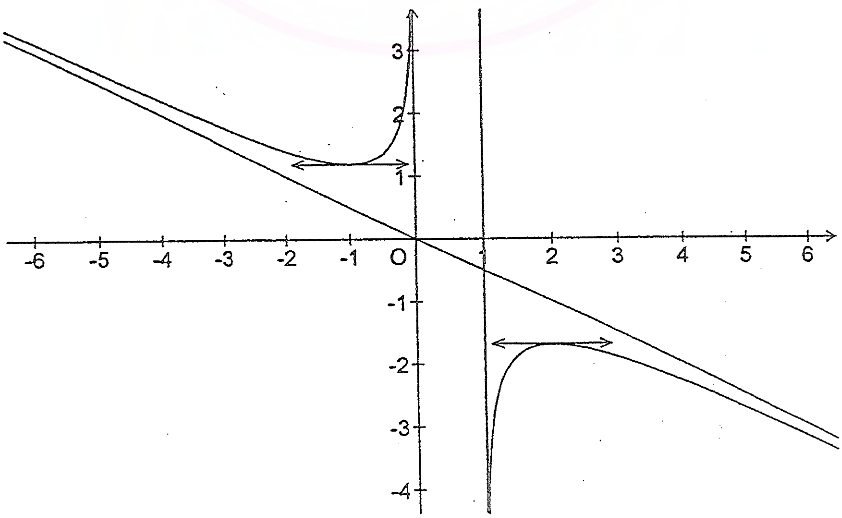
8. Tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		-1		0	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln(2)$	↗	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$	↗	$-1-\ln(2)$	↘	$-\infty$

9. Cette question est traitée dans les exercices 87 et 88.

Donc le point $\Omega\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie de la courbe C.

10. Tracé de la courbe C.



*Exercice 92.**

Étude de la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x}{x-2}\right|\right)$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition, E_f, de la fonction f.

2. Ecrire $f(x)$, suivant les valeurs de x, sans valeur absolue.

3. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de E_f.

4. Déduire de la question précédente la présence de trois asymptotes à la courbe C.

5. Étudier la position relative de la courbe C et de son asymptote horizontale que l'on note (D).

6. Déterminer la dérivée de la fonction f.

7. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in E_f$, en déduire les variations de la fonction f.

8. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

9. Montrer que $\Omega\left(1;0\right)$ est centre de symétrie de la courbe C.

10. Tracer la courbe C, ainsi que ses asymptotes et son centre de symétrie.

Solution

1. $\dfrac{x}{x-2}$ est définie pour tout $x \neq 2$, $\left|\dfrac{x}{x-2}\right|$ est strictement positif si, et seulement si, $x \neq 0$ et $x \neq 2$, donc $\boxed{E_f = \mathbb{R} - \left\{0;2\right\}}$.

2. $\dfrac{x}{x-2}$ et $x(x-2)$ ont, sur $\mathbb{R} - \left\{0;2\right\}$, le même signe.

$\left(\dfrac{x}{x-2} > 0\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]2;+\infty\right[\right)$.

$\left(\dfrac{x}{x-2} < 0\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left]0;2\right[\right)$.

- Si $x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]2;+\infty\right[$ alors $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right)$.
- Si $x \in \left]0;2\right[$ alors $f(x) = \ln\left(\dfrac{-x}{x-2}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x-2}=1$ et $\lim\limits_{X\to 1}|X|=1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\dfrac{x}{x-2}\right|=1$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\dfrac{x}{x-2}\right|=1$ et $\lim\limits_{X\to 1}\ln(X)=\ln(1)=0$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\left|\dfrac{x}{x-2}\right|\right)=0$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}|X|=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{x}{x-2}\right|=0^+$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{x}{x-2}\right|=0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\ln(X)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\left|\dfrac{x}{x-2}\right|\right)=-\infty$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\left|\dfrac{x}{x-2}\right|\right)=-\infty}$.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 2}\left|\dfrac{x}{x-2}\right|=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 2}\left|\dfrac{x}{x-2}\right|=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 2}\ln\left(\left|\dfrac{x}{x-2}\right|\right)=+\infty$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\ln\left(\left|\dfrac{x}{x-2}\right|\right)=+\infty}$.

4. On déduit des limites précédentes que les droites d'équations $x=0$ et $x=2$ sont deux asymptotes verticales et que la droite (D), d'équation $y=0$, est une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

5. La position relative de la courbe C et de la droite (D) s'obtient en étudiant le signe de $f(x)$.

Pour tout x différent de 0 et 2, on a :

$$(f(x)>0)\Leftrightarrow\left(\left|\frac{x}{x-2}\right|>1\right).$$

$$(f(x)>0)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{x-2}>1 \text{ ou } \frac{x}{x-2}<-1\right).$$

$$(f(x)>0)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{x-2}-1>0 \text{ ou } \frac{x}{x-2}+1<0\right).$$

$$(f(x)>0)\Leftrightarrow\left(\frac{2}{x-2}>0 \text{ ou } \frac{2x-2}{x-2}<0\right).$$

$$(f(x)>0)\Leftrightarrow\left(x>2 \text{ ou } 2(x-1)(x-2)<0\right).$$

$$f(x)>0\Leftrightarrow\left(x\in\left]2;+\infty\right[\right) \text{ ou } \left(x\in\left]1;2\right[\right).$$

$(f(x)>0) \Leftrightarrow \left(x \in \left]1;2\right[\cup \left]2;+\infty\right[\right)$.

De plus, $(f(x)=0) \Leftrightarrow \left(\left|\frac{x}{x-2}\right|=1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x-2}=-1 \text{ ou } \frac{x}{x-2}=1\right)$.

$(f(x)=0) \Leftrightarrow \left(x=-x+2 \text{ou } x=x+2\right) \Leftrightarrow (x=1)$.

Conclusion :

- Sur $\left]1;2\right[\cup \left]2;+\infty\right[$, C est au dessus de (D).
- Sur $\left]-\infty;0\right[\cup \left]0;1\right[$, C est en dessous de (D).
- La courbe C et la droite (D) se coupent au point d'abscisse 1.

6. Pour $x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]2;+\infty\right[$, on sait que $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$.

On pose $u(x)=\frac{x}{x-2}$ donc $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=-\frac{2}{(x-2)^2}\times\frac{x-2}{x}$.

Soit $f'(x)=\frac{-2}{x(x-2)}$.

Pour $x \in \left]0;2\right[$, on sait que $f(x)=\ln\left(\frac{-x}{x-2}\right)$.

On pose $u(x)=\frac{-x}{x-2}$ d'où $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2}{(x-2)^2}\times\frac{x-2}{-x}=\frac{-2}{x(x-2)}$.

Conclusion : pour tout $x \in E_f$, $\boxed{f'(x)=\frac{-2}{x(x-2)}}$.

Remarque : on peut utiliser le théorème : si u est dérivable et ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\ln|u|$ est dérivable et $(\ln\circ u)'=\frac{u'}{u}$.

7. Pour $x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]2;+\infty\right[$, on sait que $\frac{x}{x-2}>0$ donc $\frac{-2}{x(x-2)}<0$ et $f'(x)<0$.

Pour $x \in \left]0;2\right[$ on sait que $\frac{x}{x-2}<0$, donc $\frac{-2}{x(x-2)}>0$ et $f'(x)>0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]2;+\infty\right[$. La fonction f est strictement croissante sur $\left]0;2\right[$.

8. *Tableau de variation de la fonction* f .

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
f	0 ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

9. On va montrer que le point $\Omega\left(1,0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe C . E_f est centré en 1 .

$\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow \left(x \neq 0 \text{ et } x \neq 2\right) \Leftrightarrow \left(-x \neq 0 \text{ et } -x \neq -2\right)$.

$\left(x \in E_f\right) \Leftrightarrow \left(2-x \neq 2 \text{ et } 2-x \neq 0\right) \Leftrightarrow \left(2-x \in E_f\right)$.

Cette dernière équivalence prouve que l'ensemble de définition de la fonction f est centré en 1 .

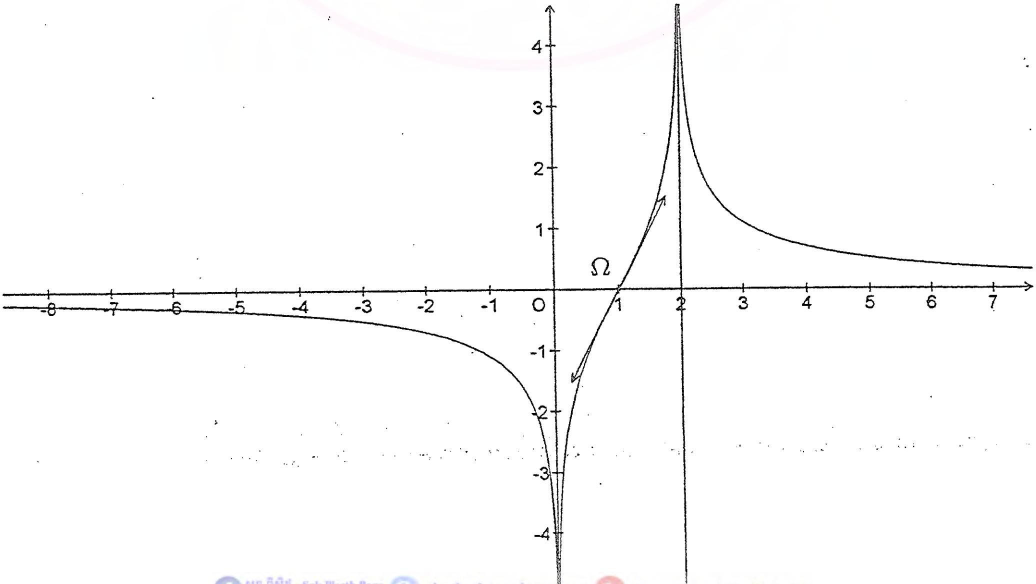
Pour tout x appartenant à E_f , on a

$$f(2-x)+f(x)=\ln\left(\left|\frac{2-x}{2-x-2}\right|\right)+\ln\left(\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)=\ln\left(\left|\frac{x-2}{x}\right|\right)+\ln\left(\left|\frac{x}{x-2}\right|\right).$$

$$f(2-x)+f(x)=\ln\left(\left|\frac{x-2}{x}\right|\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)=\ln(1)=0\,.$$

Le point $\Omega\left(1,0\right)$ est centre de symétrie de la courbe C .

10. *Tracé de la courbe* C .



Exercice 93.***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le produit :

$$P_n = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

1. Exprimer simplement P_n en fonction de n. En déduire la valeur de $Q_n = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Les suites $(P_n)_{n\geq 1}$ et $(Q_n)_{n\geq 1}$ ont-elles une limite, si oui, laquelle ?

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $R_n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} \times ... \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}$.

Exprimer simplement R_n en fonction de n. En déduire la valeur de $S_n = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) + ... + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Les suites $(R_n)_{n\geq 2}$ et $(S_n)_{n\geq 2}$ ont-elles une limite, si oui, laquelle ?

3. Calculer $U_n = \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right) + ... + \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

La suite $(U_n)_{n\geq 2}$ a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Solution

1. $P_n = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$P_1 = 2$, $P_2 = 2\times\frac{3}{2} = 3$, $P_3 = 3\times\frac{4}{3} = 4$.

On peut conjecturer : $P_n = n+1$. Montrons-le par un raisonnement par récurrence. Pour tout entier naturel non nul n, on note $A(n)$ la proposition « $P_n = n+1$ ». $A(1)$ est vraie car $P_1 = 2$.

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $A(n)$ est vraie. $P_{n+1} = P_n \times \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = (n+1)\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right) = n+2$ donc la proposition $A(n+1)$ est vraie. La proposition $A(n)$ est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{P_n = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $Q_n = \ln(P_n)$ donc $Q_n = \ln(n+1)$.

$$\boxed{Q_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1) = +\infty$ soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = +\infty}$.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, $R_n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \ldots \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}$.

$R_2 = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, $R_3 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)} = 3$. Il semble que $R_n = n$.

Montrons-le par un raisonnement par récurrence. On note pour tout entier $n \geq 2$, $B(n)$ la proposition « $R_n = n$ ».

$B(2)$ est vraie car $R_2 = 2$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que $B(n)$ est vraie.

$R_{n+1} = R_n \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \dfrac{n}{\frac{n+1-1}{n+1}} = \dfrac{n}{\frac{n}{n+1}} = n+1$. Donc la proposition $B(n+1)$ est vraie. $B(n)$ est vraie au rang 2 et elle est héréditaire, donc la proposition est vraie pour tout $n \geq 2$.

On a $\ln(R_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) = -\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -S_n$ donc

$$\boxed{S_n = \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\ln(n)}.$$

Il est clair que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty}$.

3. On définit, pour tout entier naturel $n \geq 2$, la suite $(T_n)_{n\geq 2}$ par :

$$T_n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^2}\right)} \times \ldots \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}.$$

$T_2 = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{2\times 2}{2+1}$, $T_3 = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} \times \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{9}\right)} = \dfrac{1}{\frac{4}{6}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{2\times 3}{3+1}$.

Il semble que $T_n = \dfrac{2n}{n+1}$. Montrons-le par un raisonnement par récurrence. Notons, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $C(n)$ la proposition « $T_n = \dfrac{2n}{n+1}$ ». $C(2)$ est vraie car $T_2 = \dfrac{4}{3}$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que $C(n)$ est vraie.

$$T_{n+1} = T_n \times \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)} = \frac{1}{\dfrac{n+1}{2n}} \times \frac{1}{\left(\dfrac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)} = \frac{1}{\dfrac{(n+1)(n+2)n}{2n(n+1)^2}}.$$

$$T_{n+1} = T_n \times \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)} = \frac{2n}{n+1} \times \frac{1}{\left(\dfrac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)} = \frac{2n(n+1)^2}{(n+1)(n+2)n}.$$

$T_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n+2}$ donc la proposition $C(n+1)$ est vraie. La proposition $C(n)$ est vraie au rang 2 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geq 2$.

$U_n = -\ln(T_n) = -\ln\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)$ donc $\boxed{U_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) = -\ln\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$ et $\lim\limits_{X \to 2}(-\ln(X)) = -\ln(2)$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\ln\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)\right) = -\ln(2)$.

La suite $(U_n)_{n \geq 2}$ est convergente et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\ln(2)}$.

*Exercice 94.**

On considère les trois fonctions f ; g et h définies sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \ln(x^2)$ et $h(x) = \ln(x^3)$.

On appelle C_1 ; C_2 et C_3 les représentations graphiques des fonctions f, g et h dans un repère orthonormé.

1. Étudier les variations de ces trois fonctions sur $]0 ; +\infty[$.
2. Étudier les limites de ces trois fonctions en 0 et en $+\infty$.
3. Tracer C_1, C_2 et C_3.

4. On coupe les trois graphes par la droite d'équation $x = s$, où s est un réel strictement positif. On trace les trois tangentes T_1, T_2 et T_3 aux trois points d'intersection. Démontrer que ces trois tangentes concourent en un même point. Tracer ces trois tangentes pour $s = 5$.

5. Soit r un réel strictement positif, on définit sur $\left]0;+\infty\right[$ la fonction l_r par $l_r(x) = \ln(x^r)$. On appelle T_r la tangente à C_r au point d'abscisse s. Que peut-on dire de T_r ?

Solution

1. Les dérivées des trois fonctions sont $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = \dfrac{2}{x}$ et $h'(x) = \dfrac{3}{x}$. Les fonctions f, g et h sont donc strictement croissantes sur $\left]0;+\infty\right[$.

2. Limites en 0 :

- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(x^2\right) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty}.$$

- $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(x^3\right) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty}.$$

L'axe des ordonnées est donc une asymptote verticale pour les trois courbes.

Limites en $+\infty$:

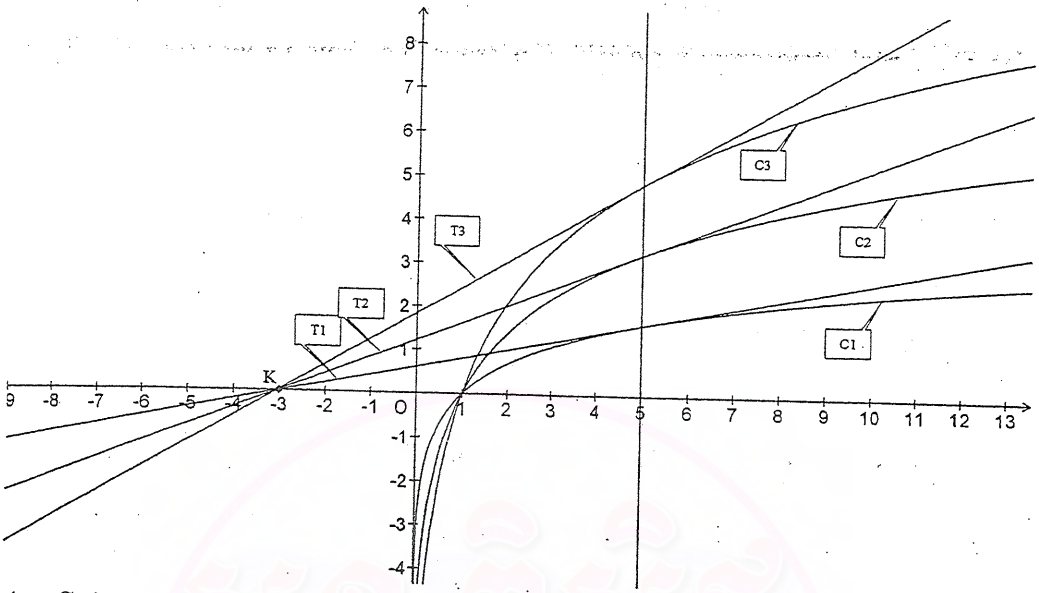
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(x^2\right) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}.$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(x^3\right) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty}.$$

3. Les courbes C_1, C_2 et C_3.



4. Soit s un réel strictement positif. Déterminons les équations des trois tangentes T_1, T_2 et T_3.

- Tangente T_1. On a $f(s) = \ln(s)$ et $f'(s) = \dfrac{1}{s}$. Une équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse s est $\boxed{y = \dfrac{1}{s}x - 1 + \ln(s)}$.

- Tangente T_2. On a $g(s) = \ln(s^2) = 2\ln(s)$ et $g'(s) = \dfrac{2}{s}$. Une équation de la tangente à C_2 au point d'abscisse s est $\boxed{y = 2\left(\dfrac{1}{s}x - 1 + \ln(s)\right)}$.

- Tangente T_3. On a $h(s) = \ln(s^3) = 3\ln(s)$ et $h'(s) = \dfrac{3}{s}$. Une équation de la tangente à C_3 au point d'abscisse s est $\boxed{y = 3\left(\dfrac{1}{s}x - 1 + \ln(s)\right)}$. Les trois tangentes ont des coefficients directeurs deux à deux différents, donc les trois tangentes sont deux à deux sécantes. Soit K l'intersection de T_1 et T_2, l'abscisse de K vérifie l'équation : $\left(\dfrac{1}{s}x - 1 + \ln(s) = 2\left(\dfrac{1}{s}x - 1 + \ln(s)\right)\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{s}x - 1 + \ln(s) = 0\right)$.

$\left(\dfrac{1}{s}x - 1 + \ln(s) = 2\left(\dfrac{1}{s}x - 1 + \ln(s)\right)\right) \Leftrightarrow \boxed{x = s - s\ln(s)}$.

Les coordonnées de K sont $\left(s - s\ln(s);0\right)$. On montre facilement que K appartient à T_3. Les trois tangentes concourent en K.

Pour $s=5$ on a $5-5\ln(5)\approx -3.04$.

5. On a $l(s)=\ln\left(s^r\right)=r\ln(s)$ et $l'(s)=\dfrac{r}{s}$. Une équation de la tangente à C_r au point d'abscisse s est $\boxed{y=r\left(\dfrac{1}{s}x-1+\ln(s)\right)}$.

On en déduit que le point K appartient à T_r.

Exercice 95.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$.

On note (C) sa courbe représentative dans $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Partie I.

1. Justifier que, pour tout x réel, $x^2-2x+2>0$.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Représenter (C) et la droite (D) d'équation $y=x$. On montrera que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de (C) et on placera les points d'abscisse 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Partie II.

On s'intéresse à l'intersection de (C) et de (D). On pose, pour tout réel x, $\varphi(x)=f(x)-x$.

1. Déterminer la fonction dérivée φ' de φ. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la limite de φ en $-\infty$.

3. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $\varphi(x)=x\left(\dfrac{2\ln(x)}{x}+\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right)$. En déduire la limite de φ en $+\infty$.

4. Montrer que la droite (D) coupe la courbe (C) en un point d'abscisse α vérifiant $0.3 < \alpha < 0.4$.

Solution

Partie I.

1. Le discriminant de $x^2 - 2x + 2$ est négatif (-4), donc ce polynôme est du signe du coefficient de x^2, c'est-à-dire positif. Donc, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 2 > 0$.

2. $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}}$.

Comme $x^2 - 2x + 2 > 0$, $f'(x)$ est du signe du numérateur.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

f est donc strictement décroissante sur $\left]-\infty;1\right]$ et strictement croissante sur $\left[1;+\infty\right[$.

3. On pose $u(x) = x^2 - 2x + 2$. On a $f(x) = \ln(u(x))$.

Pour tout réel $x \neq 0$, $u(x) = x^2\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$. De même $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

4. Soit $\Omega(1,0)$, (x,y) les coordonnées du point M dans l'ancien repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (X,Y) les coordonnées du point M dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$. On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$.

Les vecteurs sont égaux, donc leurs coordonnées sont égales.

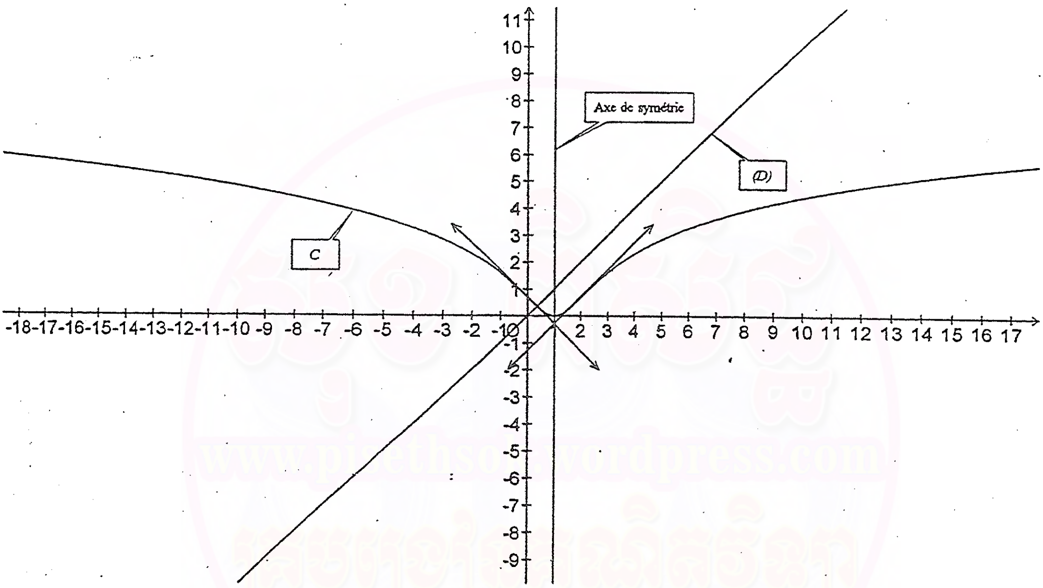
Les formules de changement de repère sont : $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = Y \end{cases}$

$(M \in (C)) \Leftrightarrow (y = f(x) \text{ et } x \in \mathbb{R})$.

$(M \in (C)) \Leftrightarrow \left(Y = \ln\left(1 + X^2\right) \text{ et } X + 1 \in \mathbb{R}\right)$.

$(M \in (C)) \Leftrightarrow \left(Y = g(X) \text{ et } X \in \mathbb{R}\right)$ avec $g(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$.

L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$, donc il est centré en 0, de plus $g(-x) = \ln(1 + (-x)^2) = \ln\left(1 + x^2\right) = g(x)$. On en déduit que g est une fonction paire et que, par conséquent, la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C).



Partie II.

1. On a $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = -\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 2} = \boxed{-\dfrac{(x-2)^2}{x^2 - 2x + 2}}$.

$\varphi'(2) = 0$ et, pour tout $x \neq 2$, $\varphi'(x) < 0$.

φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty}$.

3. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\varphi(x) = f(x) - x = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) - x = \ln\left(x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right) - x.$$

$$\varphi(x) = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - x = x\left(\frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right).$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty}$.

4. φ est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right]$, $\varphi\left(\frac{4}{10}\right)<0$ et $\varphi\left(\frac{3}{10}\right)>0$ donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet, dans $\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right]$, une unique solution α. On a $(\varphi(\alpha)=0)\Leftrightarrow(f(\alpha)=\alpha)$. La droite (Δ) coupe la courbe (C) en un point d'abscisse α vérifiant $0.3<\alpha<0.4$.

Exercice 96.

Soit f la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par :

$$f:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x>0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Encadrement de $\ln(1+x)$.

1. Montrer que, pour tout réel $x\geq 0$, $1-x\leq\dfrac{1}{1+x}\leq 1$.

2. Étudier rapidement les fonctions $x\mapsto\ln(1+x)-x$ et $x\mapsto\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ puis en déduire que, pour tout réel $x\geq 0$, $x-\dfrac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$ (1).

Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $g:x\mapsto\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}$.

3. Montrer que g est dérivable et calculer g'.

4. Prouver que, pour tout $x\geq 0$, $0\leq g'(x)\leq\dfrac{x^2}{4}$.

En déduire que, pour tout $x\geq 0$, $0\leq g(x)\leq\dfrac{x^3}{12}$ (2) (on pourra étudier la fonction $x\mapsto g(x)-\dfrac{x^3}{12}$).

Les variations de f.

5. Montrer que f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et calculer $f'(x)$.

6. Établir que pour tout $x\geq 0$, $g(x)\leq\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$. Grâce à (2), en déduire le sens de variation de f.

Étude de f aux bornes de l'intervalle de définition.

7. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

8. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ (on pourra utiliser (2)). En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 et, grâce à (1), préciser la position de (C) par rapport à (T).

9. Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe (C) et la droite (T).

Solution

1. Pour tout $x\geq 0$, $1-x-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1-x^2-1}{1+x}=-\dfrac{x^2}{1+x}\leq 0$. On en déduit que $1-x\leq\dfrac{1}{1+x}$. De plus, $1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}\geq 0$.

Finalement, $\boxed{1-x\leq\dfrac{1}{1+x}\leq 1}$.

2. On pose $\phi : x\mapsto \ln(1+x)-x$. Pour tout $x\geq 0$, $\phi'(x)=-\dfrac{x}{1+x}\leq 0$ donc ϕ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et $\phi(0)=0$ donc ϕ est négative ou nulle sur $[0;+\infty[$ d'où $\ln(1+x)\leq x$.

On pose $\psi : x\mapsto \ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$. Pour tout $x\geq 0$, $\psi'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x$. En utilisant la question précédente, on a $\psi'(x)\geq 0$ donc ψ est croissante sur $[0;+\infty[$ et $\psi(0)=0$. On en déduit que ψ est positive sur $[0;+\infty[$ d'où $x-\dfrac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)$.

Finalement, on a montré que $\boxed{x-\dfrac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x}$.

3. g est manifestement dérivable et, pour tout $x\geq 0$, $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2(2+x)-2x}{(2+x)^2}=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{4}{(2+x)^2}$ soit

$$\boxed{g'(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}}.$$

4. Il est clair que $g'(x) \geq 0$. De plus, $x \geq 0$ implique $x+1 \geq 1$ et $x+2 \geq 2$ d'où $(x+2)^2 \geq 4$ et $(x+1)(x+2)^2 \geq 4$ soit $g'(x) \leq \dfrac{x^2}{4}$.

Finalement, $\boxed{0 \leq g'(x) \leq \dfrac{x^2}{4}}$.

Soit $\varepsilon : x \mapsto g(x) - \dfrac{x^3}{12}$ définie sur $\left[0;+\infty\right[$. Cette fonction est dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$ et, $\varepsilon'(x) = g'(x) - \dfrac{x^2}{4}$. Il suffit d'utiliser ce qui vient d'être fait pour montrer que $\varepsilon'(x) \leq 0$. Ainsi, ε est décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$ et $\varepsilon(0) = 0$ donc $\varepsilon(x) \leq 0$ d'où $\boxed{0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^3}{12}}$.

5. f est un quotient de deux fonctions dérivables sur $\left]0;+\infty\right[$, le dénominateur de f ne s'annulant pas sur $\left]0;+\infty\right[$ donc f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$. Pour tout x appartenant à $\left]0,+\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} \text{ soit } \boxed{f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)\right)}.$$

6. Pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{2x}{x+2} - \frac{x}{1+x} = \frac{2x(x+1) - x(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)} \geq 0.$$

On a prouvé que $\dfrac{2x}{x+2} \geq \dfrac{x}{x+1}$ donc $-\dfrac{2x}{x+2} \leq -\dfrac{x}{x+1}$ d'où $\ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$ soit $\boxed{g(x) \leq \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}}$.

Ainsi, $-\ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1} \leq -g(x)$ et, en utilisant $0 \leq g(x)$, $\boxed{f'(x) \leq 0}$.

La fonction f est continue sur $\left[0;+\infty\right[$ $\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1\right)$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) \leq 0$. On en déduit que f est décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$.

7. $$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln\left[x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

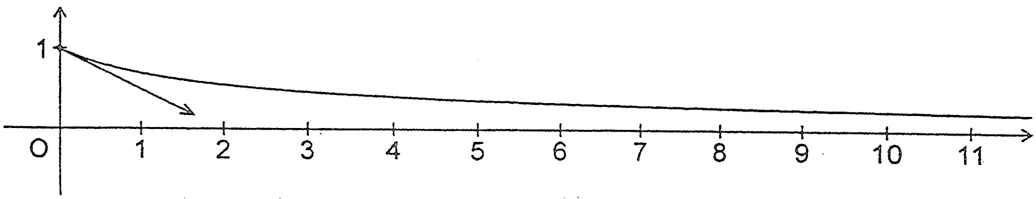
La courbe représentative de f admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

8. On a vu dans la question 4. que $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$ donc $0 \leq \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x} \leq \frac{x^3}{12}$ d'où $\frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{x^3}{12} + \frac{2x}{2+x}$ et $\frac{2x}{2+x} - x \leq \ln(1+x) - x \leq \frac{x^3}{12} + \frac{2x}{2+x} - x$ soit
$\frac{-x^2}{2+x} \leq \ln(1+x) - x \leq \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2+x}$.

Pour tout $x > 0$, on a $\frac{-1}{2+x} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq \frac{x}{12} - \frac{1}{2+x}$.

Faisons tendre x vers 0. $\lim\limits_{x \to 0}\left(-\frac{1}{2+x}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x}{12} - \frac{1}{2+x}\right) = -\frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{0} = -\frac{1}{2}$. On peut en déduire que f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}}$.

f est dérivable en 0 donc (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente, (T), dont une équation est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 1}$. La position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T) est donnée par l'étude du signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ soit $\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{2}x - 1$. On a vu dans la question 2. que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ d'où, pour tout $x > 0$, $\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 + \frac{x}{2} \geq 0$.
Finalement, (C) est au dessus de (T).



Exercice 97.***

Le but de cet exercice est de démontrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$ définie par : $c_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}-\ln(n)$ est convergente.

1. Montrer que, pour tout réel $x\geq 1$, on a :

$$\frac{1}{x+1}\leq \ln(1+x)-\ln(x)\leq \frac{1}{x}$$

2. On pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Prouver que, pour tout $n\geq 1$, $u_{n+1}-1\leq \ln(n+1)\leq u_n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite $+\infty$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

En utilisant l'encadrement obtenu à la question 1, montrer que, pour tout $n\geq 1$, $0\leq f(n)\leq \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. Vérifier que, pour tout $n\geq 2$, $c_n = f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)$. En déduire que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$ est croissante et que, pour tout $n\geq 2$, $f(1)\leq c_n\leq 1-\dfrac{1}{n}$.

Déduire de la question précédente que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$ converge vers un réel que l'on notre γ.

Remarque : Ce réel γ s'appelle la constante d'Euler. Euler a calculé 16 décimales de γ en 1734. Actuellement on ne sait toujours pas si γ est rationnel ou irrationnel.

Solution

1. On pose, pour tout $x\geq 1$, $u(x)=\ln(1+x)-\ln(x)-\dfrac{1}{x+1}$ et $v(x)=\dfrac{1}{x}-\ln(1+x)+\ln(x)$.

- Étude de la fonction u sur $\left[1;+\infty\right[$:

$u'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{x(x+1)}$ donc, pour tout $x\in\left[1;+\infty\right[$, $u'(x)<0$ et u est strictement décroissante sur $\left[1;+\infty\right[$.

De plus, $u(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x-1}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$, donc, pour tout $x\in\left[1;+\infty\right[$, $u(x)\geq 0$. On a $\boxed{\frac{1}{x+1}\leq\ln(1+x)-\ln(x)}$ (1).

- Étude de la fonction v sur $\left[1;+\infty\right[$:

$v'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{-1}{x^2(x+1)}$ donc, pour tout $x\in\left[1;+\infty\right[$, $v'(x)<0$ et v est strictement décroissante sur $\left[1;+\infty\right[$.

De plus, $v(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=0$ donc, pour tout $x\in\left[1;+\infty\right[$, $v(x)\geq 0$. On a donc $\boxed{\ln(1+x)-\ln(x)\leq\frac{1}{x}}$ (2).

D'après (1) et (2), pour tout $x\geq 1$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{x+1}\leq\ln(1+x)-\ln(x)\leq\frac{1}{x}}.$$

2. On note, pour tout entier $n\geq 1$, $P(n)$ la proposition « $u_{n+1}-1\leq\ln(1+n)\leq u_n$ ».

Pour $n=1$, on a $u_2=1+\frac{1}{2}$ et $u_1=1$. Comme $\frac{1}{2}\leq\ln(2)\leq 1$, la proposition $P(1)$ est vraie.

Soit n un entier naturel non nul. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_{n+1}-1\leq\ln(1+n)\leq u_n$ (3).

En utilisant l'encadrement de la question 1, pour $x=n+1$, on obtient $\frac{1}{n+2}\leq\ln(n+2)-\ln(n+1)\leq\frac{1}{n+1}$ (4).

On ajoute, membre à membre, les encadrements (3) et (4) pour obtenir $u_{n+1}+\frac{1}{n+2}-1\leq\ln(n+2)\leq u_n+\frac{1}{n+1}$.

Ainsi, $u_{n+2}-1\leq\ln(n+2)\leq u_{n+1}$ donc la proposition $P(n+1)$ est vraie. La proposition $P(n)$ est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n\geq 1$.

Pour tout $n\geq 1$, $\boxed{u_{n+1}-1\leq\ln(1+n)\leq u_n}$.

Pour $n\geq 1$, $\ln(n+1)\leq u_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$, on a

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

3. On utilise l'encadrement de la question 1 avec $x = n$.

Il vient $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1+n) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$, ce qui s'écrit encore $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. On multiplie par -1 pour obtenir $-\frac{1}{n} \leq -\ln\left(\frac{1+n}{n}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$. Ainsi, $0 \leq \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Finalement, pour tout $n \geq 1$, $\boxed{0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note $Q(n)$ la proposition :

« $c_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$ ».

Pour $n = 2$, $c_2 = 1 - \ln(2)$ et $f(1) = 1 - \ln(2)$ donc $c_2 = f(1)$ et la proposition $Q(1)$ est vraie.

Pour un certain entier naturel supérieur ou égal à deux, on suppose que $Q(n)$ est vraie. On a $c_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$ donc

$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = c_n + f(n)$.

$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = u_{n-1} - \ln(n) + \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$.

$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = u_n - \ln(n+1)$.

$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = c_{n+1}$.

La proposition $Q(n+1)$ est donc vraie. La proposition $Q(n)$ est vraie au rang 2 et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geq 2$.

Pour tout $n \geq 2$, $\boxed{c_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)}$.

Pour tout $n \geq 2$, $c_{n+1} - c_n = f(n) \geq 0$ donc la suite (c_n) est croissante.

Pour tout $n \geq 2$, $f(n) \geq 0$ donc $f(1) \leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$ c'est-à-dire $f(1) \leq c_n$ (5).

On a : $f(1) \leq 1 - \frac{1}{2}$, $f(2) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, …, $f(n-2) \leq \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}$, $f(n-1) \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $c_n \leq 1 - \frac{1}{n}$ (6).

D'après (5) et (6), pour tout $n \geq 2$, $\boxed{f(1) \leq c_n \leq 1 - \frac{1}{n}}$.

3.a. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \geq 2$, $f(1) \leq c_n \leq 1$. La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^* - \{1\}}$ est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente vers un réel γ vérifiant $1 - \ln(2) \leq \gamma \leq 1$.

XI. *Exercice d'après les annales du bac*

Exercice 98.

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{x}}$, puis la recherche de primitives de cette fonction.

Partie A – Étude de fonctions auxiliaires.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $\left]1;+\infty\right[$ par :

$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1).$$

1.a. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

1.b. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]1;+\infty\right[$.

1.c. Résoudre, dans $\left]1;+\infty\right[$, l'inéquation $1 - \ln(x-1) > 0$.

1.d. Étudier les variations de g sur l'intervalle $\left]1;+\infty\right[$.

1.e. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $\left[e+1;e^3+1\right]$, et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $\left]1;\alpha\right[$ et $\left]\alpha;+\infty\right[$.

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $\left]1;+\infty\right[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.

2.a. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$ puis prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

2.b. Calculer $\varphi'(x)$ puis montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g\left(x^2\right)$ sur l'intervalle $\left]1;+\infty\right[$.

2.c. Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $\left]1;\sqrt{\alpha}\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left]\sqrt{\alpha};+\infty\right[$.

Partie B - Étude de la fonction f.

1. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$, on a $f(x)=\varphi\left(e^x\right)$.

2. En déduire :

2.a. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

2.b. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2.c. Le sens de variation de f sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ puis montrer que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3. Montrer que, pour tout x de $\left]0;+\infty\right[$, $f(x)\leq\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4. Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unité 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 pour valeur approchée de α.

Partie C - Recherche de primitives de f.

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle

$$y'+y=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}.$$

2. On pose $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

2.a. Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.

2.b. En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.

Solution

Partie A.

1.a. $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ et $\lim\limits_{X\to0}X\ln(X)=0$ donc $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\ln(x-1)=0$.
De plus, $\lim\limits_{x\to1}2x=2$ (la fonction $x\mapsto 2x$ est continue en 1).
$\lim\limits_{x\to1}\left[2x-(x-1)\ln(x-1)\right]=2$ soit $\boxed{\lim\limits_{x\to1}g(x)=2}$.

1.b. La fonction g est dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$. On pose $u(x)=x-1$, on a alors $g(x)=2x-u(x)\ln(u(x))$ d'où

$g'(x)=2-u'(x)\ln(u(x))-u(x)\times u'(x)\times\ln'(u(x))$.

$g'(x)=2-1\ln(x-1)-(x-1)\times1\times\dfrac{1}{x-1}=1-\ln(x-1)$.

$$\boxed{g'(x) = 1 - \ln(x-1)}.$$

1.c. Pour tout $x \in \left]1;+\infty\right[$, on a $\left(1-\ln(x-1) > 0\right) \Leftrightarrow \left(\ln(x-1) < 1\right)$.

$\left(1-\ln(x-1) > 0\right) \Leftrightarrow \left(\exp\left[\ln(x-1)\right] < \exp(1)\right) \Leftrightarrow (x-1 < e)$.

$\left(1-\ln(x-1) > 0\right) \Leftrightarrow (x < e+1)$.

1.d. D'après 1.c, on a $\left(g'(x) > 0\right) \Leftrightarrow (1 < x < 1+e)$,

$\left(g'(x) < 0\right) \Leftrightarrow (x > 1+e)$ et $g'(1+e) = 0$.

La fonction g est strictement croissante sur $\left]1;1+e\right]$ et strictement décroissante sur $\left[1+e;+\infty\right[$.

1.e. Sur l'intervalle $\left[e+1;e^3+1\right]$, la fonction g est continue et strictement décroissante, donc elle réalise une bijection de $\left[e+1;e^3+1\right]$ sur $\left[g\left(e^3+1\right);g(e+1)\right]$.

$g\left(e^3+1\right) = 2\left(e^3+1\right) - e^3\ln\left(e^3\right) = 2e^3 + 2 - 3e^3 = 2 - e^3$.

$g(e+1) = 2(e+1) - e\ln(e) = 2e + 2 - e = e + 2$.

Il est clair que $e+2 > 0$ et, comme $2 < e$, on a $2 - e^3 < 0$.

Donc 0 appartient à $\left[g\left(e^3+1\right);g(e+1)\right]$. Sur $\left[e+1;e^3+1\right]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. On a $\boxed{e+1 < \alpha < e^3+1}$.

La fonction g est strictement décroissante sur $\left[1+e;+\infty\right[$ et $g(\alpha) = 0$. Donc si $x > \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $1+e \leq x < \alpha$ alors $g(x) > 0$.

La fonction g est strictement croissante sur $\left]1;1+e\right]$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$ donc si $1 < x \leq 1+e$ donc $2 < g(x)$ et $g(x) > 0$.

x	1		$1+e$		α		$1+e^3$		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	

Si $x \in \left]1;\alpha\right[$ alors $g(x) > 0$. Si $x \in \left]\alpha;+\infty\right[$ alors $g(x) < 0$.

$g(\alpha) = 0$.

2.a. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 - 1\right) = 0$ (la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est continue en 1).

$\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(x^2 - 1\right) = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$ (la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en 1)

$\lim\limits_{x \to 1}\left[\frac{1}{x} \times \ln\left(x^2 - 1\right)\right] = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = -\infty}$.

Pour tout $x > 1$, $\varphi(x) = \dfrac{\ln\left(x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \dfrac{2\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x}$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 \times \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

De nouveau, on utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ (car ln est continue en 1) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \times \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0}.$$

2.b. La fonction φ est dérivable sur $\left]1; +\infty\right[$. On pose $v(x) = x^2 - 1$.

On a $v'(x) = 2x$ et $\varphi(x) = \dfrac{\ln(v(x))}{x}$.

$$\varphi'(x) = \frac{v'(x) \times \ln'(v(x)) \times x - \ln(v(x))}{x^2} = \frac{\frac{2x^2}{x^2 - 1} - \ln\left(x^2 - 1\right)}{x^2}.$$

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{2x^2 - \left(x^2 - 1\right)\ln\left(x^2 - 1\right)}{x^2\left(x^2 - 1\right)}}.$$

$g\left(x^2\right) = 2x^2 - \left(x^2 - 1\right)\ln\left(x^2 - 1\right)$ donc $\varphi'(x) = \dfrac{g\left(x^2\right)}{x^2\left(x^2 - 1\right)}$.

Pour tout x appartenant à $\left]1; +\infty\right[$, $x^2\left(x^2 - 1\right) > 0$ donc $\varphi'(x)$ est du signe de $g\left(x^2\right)$.

2.c. Pour tout $x > 1$, on a $\left(g\left(x^2\right) > 0\right) \Leftrightarrow \left(1 < x^2 < \alpha\right) \Leftrightarrow \left(1 < x < \sqrt{\alpha}\right)$ (la fonction racine est strictement croissante sur $\left]0; +\infty\right[$ et $x > 0$).

Donc $\left(\varphi'(x) > 0\right) \Leftrightarrow \left(1 < x < \sqrt{\alpha}\right)$.

Pour $x > 1$, on a $\left(g\left(x^2\right) < 0\right) \Leftrightarrow \left(x^2 > \alpha\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2} > \sqrt{\alpha}\right) \Leftrightarrow \left(x > \sqrt{\alpha}\right)$.

Donc $\left(\varphi'(x) < 0\right) \Leftrightarrow \left(x > \sqrt{\alpha}\right)$. $\varphi'\left(\sqrt{\alpha}\right) = 0$.

Finalement, φ est strictement croissante sur $\left]1;\sqrt{\alpha}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\alpha};+\infty\right[$.

Partie B.

1. Pour tout x appartenant à $\left]0;+\infty\right[$, on a

$$\varphi\left(e^x\right) = \frac{\ln\left(\left(e^x\right)^2 - 1\right)}{e^x} = \frac{\ln\left(e^{2x} - 1\right)}{e^x} = f(x).$$

2.a. $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ (la fonction exponentielle est continue en 0) et $\lim\limits_{X\to 1} \varphi(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \varphi\left(e^x\right) = -\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.

2.b. On utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \varphi(X) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi\left(e^x\right) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}.$$

2.c. Pour tout x appartenant à $\left]0;+\infty\right[$, la fonction f est dérivable en x et on a $\boxed{f'(x) = e^x\varphi'\left(e^x\right)}$. La fonction exponentielle est strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $\varphi'\left(e^x\right)$.

Pour tout $x > 0$, on a $\left(\varphi'\left(e^x\right) > 0\right) \Leftrightarrow \left(1 < e^x < \sqrt{\alpha}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\ln(1) < \ln\left(e^x\right) < \ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right) \Leftrightarrow \left(0 < x < \ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)$.

(la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

donc $\left(f'(x) > 0\right) \Leftrightarrow \left(0 < x < \ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)$.

De même :

$\left(\varphi'\left(e^x\right) < 0\right) \Leftrightarrow \left(e^x > \sqrt{\alpha}\right) \Leftrightarrow \left(\ln\left(e^x\right) > \ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right) \Leftrightarrow \left(x > \ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)$

donc $\left(f'(x) < 0\right) \Leftrightarrow \left(x > \ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)$.

$f'\left(\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right) = e^{\ln(\sqrt{\alpha})} \times \varphi'\left(e^{\ln(\sqrt{\alpha})}\right) = e^{\ln(\sqrt{\alpha})} \times \varphi'\left(\sqrt{\alpha}\right) = 0$.

On peut conclure que f est strictement croissante sur $\left]0;\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\ln\left(\sqrt{\alpha}\right);+\infty\right[$. La fonction f est croissante puis décroissante, elle admet donc un maximum en

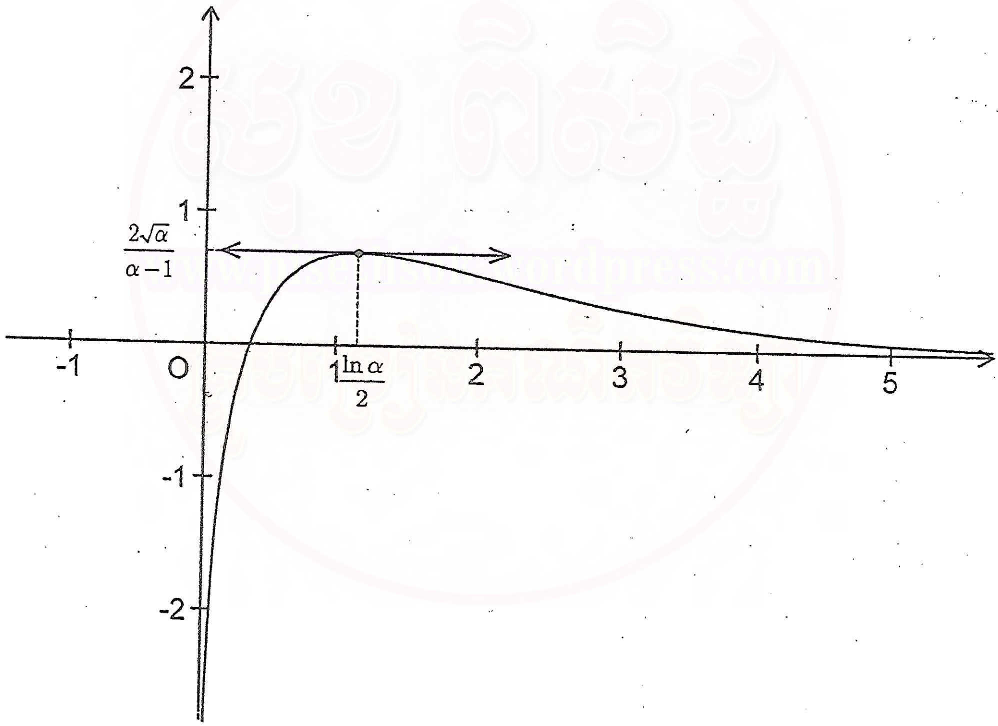
$x = \ln(\sqrt{\alpha})$.

3. Comme f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$, pour tout réel x appartenant à $\left]0;+\infty\right[$, on a $f(x) \le f\left(\ln(\sqrt{\alpha})\right)$.

$$f\left[\ln(\sqrt{\alpha})\right] = \varphi\left[e^{\ln(\sqrt{\alpha})}\right] = \varphi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln\left[(\sqrt{\alpha})^2 - 1\right]}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}.$$

On sait (Partie A. 1.e) que $g(\alpha) = 0$ donc $2\alpha - (\alpha-1)\ln(\alpha-1) = 0$ d'où $\ln(\alpha-1) = \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$. $f\left[\ln(\sqrt{\alpha})\right] = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \times \dfrac{2\alpha}{\alpha-1} = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$. Pour tout réel x appartenant à $\left]0;+\infty\right[$, on a $\boxed{f(x) \le \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}}$.

4. Tracé de f.



Partie C.

1. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \varphi(e^x)$.

$$f'(x) = \varphi'(e^x) \times e^x = \frac{g\left(e^{2x}\right)}{e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)} \times e^x = \frac{2e^{2x} - \left(e^{2x}-1\right)\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x\left(e^{2x}-1\right)}.$$

$$f'(x) + f(x) = \frac{2e^{2x} - \left(e^{2x}-1\right)\ln\left(e^{2e}-1\right)}{e^x\left(e^{2x}-1\right)} + \frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}.$$

$$f'(x)+f(x)=\frac{2e^{2x}-\left(e^{2x}-1\right)\ln\left(e^{2e}-1\right)}{e^{x}\left(e^{2x}-1\right)}+\frac{\left(e^{2x}-1\right)\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{x}\left(e^{2x}-1\right)}.$$

$$f'(x)+f(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{x}\left(e^{2x}-1\right)}=\frac{2e^{x}}{e^{2x}-1}.$$

De plus, pour tout $x>0$,

$$\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=\frac{e^{x}\left(e^{x}+1\right)-e^{x}\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+1\right)}=\frac{e^{2x}+e^{x}-e^{2x}+e^{x}}{e^{2x}-1}=\frac{2e^{x}}{e^{2x}-1}.$$

Finalement, $\boxed{f'(x)+f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\frac{e^{x}}{e^{x}+1}}$. La fonction f est une solution particulière, sur $\left]0;+\infty\right[$, de l'équation différentielle $y'+y=\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$.

2.a. Pour tout réel x appartenant à $\left]0;+\infty\right[$, on pose $u(x)=e^{x}-1$ et $v(x)=e^{x}+1$. On a alors $h(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}-\frac{v'(x)}{v(x)}$.

Sur $\left]0;+\infty\right[$, les fonctions u et v sont strictement positives, donc on en déduit une primitive H de h sur $\left]0;+\infty\right[$:

$$H(x)=\ln(u(x))-\ln(v(x))=\ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)\text{ soit }\boxed{H(x)=\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)}.$$

2.b. Pour tout réel x appartenant à $\left]0;+\infty\right[$, on a :

$\left(f'(x)+f(x)=h(x)\right)\Leftrightarrow\left(f(x)=h(x)-f'(x)\right)$.

Les primitives de f sur $\left]0;+\infty\right[$ sont les fonctions F définies sur $\left]0;+\infty\right[$ par $F(x)=H(x)-f(x)+K=\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)-\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{x}}+K$.

$$\boxed{F(x)=\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)-\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{x}}+K}.$$