ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ឆាយ សុជាតិ
សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា
វិទ្យាល័យ ព្រះយុគន្ធរ

នូ រ៉េត
សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា
វិទ្យាល័យ ព្រះយុគន្ធរ

កំណែលំហាត់ ប្រូបាប

មានបន្ថែម :

- សង្ខេបមេរៀន
- ឧទាហរណ៍ងាយយល់

ភាគ ៣

សំរាប់

☑ ប្រលងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

12

☑ ប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យ

(ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី)

ឆ.ស: 2001

ប្រូបាប

សេចក្តីផ្តើម :

យើងបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយ ។ មុនពេលបោះគ្មានអ្នកណាម្នាក់អាចដឹងនូវលេខដែលត្រូវចេញនោះទេ ។ តាមគំនិតនេះ គេថាការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់នេះគឺជា " ពិសោធន៍ដោយចៃដន្យ " ។ លទ្ធផលដែលអាចចេញមាន 6 បែប (គឺអាចចេញពី លេខ 1 ដល់លេខ 6) ។ ដូច្នោះក្នុងការ ចេញលេខនីមួយៗ មានសំណាង 1 លើ 6 ។ គេថា " ប្រូបាប នៃការចេញលេខនីមួយៗ ស្មើ នឹង $\frac{1}{6}$ " ។ បានសេចក្តីថា យើងស្ថិតនៅចំពោះមុខ បាតុភូតមួយដែលកើតឡើងដោយចៃដន្យសុទ្ធសាធ ។ បញ្ហាដែលទាក់ទងទៅនឹងល្បែង ចៃដន្យបានកើតមាននៅសហរដ្ឋ អាមេរិក នៅស.វ 17 ដោយ លោក Pascal និង Fermat (ជាគណិតវិទូ) ។

- គោលបំណងនៃការសិក្សាប្រូបាប គឺសិក្សាបាតុភូតចៃដន្យជាបៀបទ្រឹស្តី ។

I. បញ្ញត្តិនៃប្រូបាប

ប្រូបាបមានសារសំខាន់ ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃដែលយើងប្រើប្រាស់វា សំរាប់វាស់កំរិតនៃភាពមិនទៀងទាត់ ។ ក្នុងបច្ចុប្បន្ន ការគណនាប្រូបាប ត្រូវបានគេប្រើប្រាស់ជា ញឹកញាប់បំផុត លើវិស័យ : ឧត្តុនិយម (ទស្សទាយអាកាសធាតុ) ក្រុមហ៊ុនធានារ៉ាប់រង (ធ្វើសេចក្តីសំរេចចិត្ត រឺធ្វើការជ្រើសរើស) រូបវិទ្យា ជីវវិទ្យា ... ។

ព្រឹត្តិការណ៍

1. សញ្ញាណព្រឹត្តិការណ៍ :

ក. ឧទាហរណ៍ :

ការបោះប្រាក់កាក់ ការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ ការបាញ់អាប៉ោង ការហូតយកបៀចេញពីហ៊ូ ការទាញយកប៊ូលចេញពីថង់ ... ។ ទាំងនេះនៅក្នុង ភាសាប្រូបាប គេហៅថា **វិញ្ញាសា** ។

- ប្រាក់កាក់ដែលផ្កាប់ , គ្រាប់ឡុកឡាក់ដែលចេញលេខ 5 , បៀទាញចេញពីហ៊ូសន្លឹក " អាត់ " ... គឺជា **លទ្ធផលនៃវិញ្ញាសា** ។
- ក្នុងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ : វាអាចចេញលេខ 1,2,3,4,5,6 ; ធាតុនីមួយៗ ហៅថា **ករណីអាច** ។
- សំនុំ $U=\{1,2,3,4,5,6\}$; U ហៅថា **សាកល រឺ លំហគំរូសាក** ។
- ឧបមាថា គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 5 គេថា 5 ជា **ការពិតនៃវិញ្ញាសា** ។

ខ. • ក្នុងចំនោមធាតុ U មានធាតុតែមួយទេដែលហៅថា ការពិត តាងដោយ r

- បើមានវិញ្ញាសាមួយលើសាកល U នោះ r ទាក់ទងទៅនឹង លទ្ធផលនៃវិញ្ញាសា
- បើព្រឹត្តិការណ៍មួយកើតឡើង លុះត្រាតែ r ជាធាតុមួយរបស់វា ។

A កើតឡើង $\Leftrightarrow$ $r\in A$
A មិនកើតឡើង $\Leftrightarrow$ $r\notin A$

- ϕ ជាព្រឹត្តិការណ៍មួយ ដែលមិនអាចកើតឡើងទេព្រោះ $r\notin\phi$ ។

គេថា ϕ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន ។

គ. **និយមន័យ** : U ជាសំនុំមួយហៅថា **សាកល រឺ លំហគំរូសាក**

- ធាតុនីមួយៗរបស់ U ហៅថា **ករណីអាច**

- ផ្នែកនីមួយៗនៃ U (រឺសំនុំរងនៃ U) ហៅថា **ព្រឹត្តិការណ៍** ។

A ជាព្រឹត្តិការណ៍ $\Leftrightarrow A\subset U$
$\Leftrightarrow A\in P(U)$

ឧទាហរណ៍ :

ប្រអប់មួយមានបាល់បី តាងដោយ a,b,c ។ គេចាប់យកចេញពីថង់នូវបាល់មួយដោយចៃដន្យ ។

- សាកល $U=\{a,b,c\}$
- ព្រឹត្តិការណ៍ទាំងឡាយជាសំនុំរងនៃ U មាន :

$\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$

a , b , c ជាករណីអាច

ឧបមាបាល់ យកចេញពីថង់ គឺបាល់ a ; a ជាការពិត ; $\{a\}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍

2. ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ :

- **និយមន័យ :**

ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ ជាព្រឹត្តិការណ៍ ដែលមានធាតុតែមួយ ។ ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុទាំងអស់ ជាសំនុំរងនៃសកល U ។

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើ : $\{a\},\{b\},\{c\}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ ឯកធាតុ ។

3. ព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើង :

- ព្រឹត្តិការណ៍ A មួយកើតឡើង កាលណា r ជាធាតុមួយរបស់ A ។

A កើតឡើង $\Leftrightarrow r\in A$

4. <u>**ព្រឹត្តិការណ៍មិនកើតឡើង**</u> :

- ព្រឹត្តិការណ៍ B មួយមិនកើតឡើង កាលណា $r \notin B$

$\boxed{B \text{ មិនកើតឡើង} \Leftrightarrow r \notin B}$ ដែ $r \in A$

5. <u>**ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុង**</u> :

គេថាព្រឹត្តិការណ៍ពីរជា " **ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុង<u>និងគ្នា</u>** " គឺជាព្រឹត្តិការណ៍ ពីរ **ដែលមិនអាចកើតឡើង**ព្រមគ្នា ។ បើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B មិនចុះសំរុងកាលណា A **និង** B គ្មានធាតុរួមគ្នា រឺ $A \cap B = \phi$ ។

6. <u>**ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ**</u> :

ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃព្រឹត្តិការណ៍ A តាងដោយ $\overline{A} = C_U A$ (សំណុំរងបំពេញនៃ A ក្នុង U) គឺជាព្រឹត្តិការណ៍មួយ ដែលបង្កើតឡើងដោយគ្រប់យថាភាព មិនស្ថិតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ A ។

ដូច្នេះ :

$\boxed{\overline{A} \text{ កើតឡើង} \Leftrightarrow A \text{ មិនកើតឡើង}}$

7. បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរ :

" $A \cup B$ " ជាព្រឹត្តិការណ៍ " A រឺ B "

" $A \cap B$ " ជាព្រឹត្តិការណ៍ " A រឺ B "

- ព្រឹត្តិការណ៍ $A \cup B$ កើតឡើង $\Leftrightarrow$ A កើតឡើង រឺ B កើតឡើង
- ព្រឹត្តិការណ៍ $A \cap B$ កើតឡើង $\Leftrightarrow$ A កើតឡើង និង B កើតឡើង

<u>**ឧទាហរណ៍ 1:**</u>

ក្នុងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ (ដែលមានលំនឹងល្អ) គេមាន :

- ព្រឹត្តិការណ៍ A: ចេញលេខ $\{2,3,4,5\}$
- ព្រឹត្តិការណ៍ B: ចេញលេខ $\{4,5,6\}$
- ព្រឹត្តិការណ៍ C: ចេញលេខ $\{6\}$
- ព្រឹត្តិការណ៍ D: ចេញលេខ $\{1,2,3\}$

គេបាន :
- ព្រឹត្តិការណ៍ $A \cup B$ ចេញលេខ $\{2,3,4,5,6\}$
- ព្រឹត្តិការណ៍ $A \cap B$ ចេញលេខ $\{4,5\}$
- ព្រឹត្តិការណ៍ A និង C មិនអាចកើតមានព្រមគ្នា

$\Rightarrow$ វាជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរដែល មិនចុះសំរុងនិងគ្នា នោះព្រឹត្តិការណ៍ $A \cap C = \phi$

- ព្រឹត្តិការណ៍ B និង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា (ព្រោះ $D = \overline{B}$)

<u>**ឧទាហរណ៍ 2:**</u>

គេអោយសាកល U(រឺលំហគំរូសាក U)និង ព្រឹត្តិការណ៍ A , B , C ។ កំនត់ព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

ក. ព្រឹត្តិការណ៍ B និង C កើតឡើង តែ A មិនកើតឡើង

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 3 កើតឡើងព្រមគ្នា

គ. ព្រឹត្តិការណ៍តែ 2 គត់កើតឡើង

ឃ. យ៉ាងតិចណាស់មានព្រឹត្តិការណ៍ 2 កើតឡើង

ង. គ្មានព្រឹត្តិការណ៍ណាមួយកើតឡើង

ច. យ៉ាងតិចណាស់មានព្រឹត្តិការណ៍មួយកើតឡើង ។

ចំលើយ

ក. បើព្រឹត្តិការណ៍ A មិនកើតឡើង ⇔ ព្រឹត្តិការណ៍ $\bar{A}$ កើតឡើង

គេបាន : $B\cap C\cap \bar{A}$

ខ. គេបាន : $A\cap B\cap C$

គ. បើព្រឹត្តិការណ៍តែ 2 គត់កើតឡើង បានន័យថាមានព្រឹត្តិការណ៍មួយ មិនកើតឡើង

គេបាន : $(A\cap B\cap \bar{C})\cup(A\cap C\cap\bar{B})\cup(B\cap C\cap\bar{A})$

ឃ. គេបាន : $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

ង. គ្មានព្រឹត្តិការណ៍ណាមួយកើតឡើង បានន័យថា :

ព្រឹត្តិការណ៍ $\bar{A}$, $\bar{B}$ និង $\bar{C}$ កើតឡើង

គេបាន : $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}=\overline{A\cup B\cup C}$

ច. យ៉ាងតិចណាស់ មានព្រឹត្តិការណ៍មួយកើតឡើង បានន័យថា :

ព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើង រឺ B កើតឡើង រឺ C កើតឡើង ។

គេបាន : $A\cup B\cup C$

ឧទាហរណ៍ទី 3 :

ព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យ A , B , C កំនត់ដោយមានវិញ្ញាសាដូចគ្នា ។ គេអោយព្រឹត្តិការណ៍ ពីរ : $E_1=A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$, $E_2=A\cap(B\cup C)$ (ដែល $\bar{B}$ និង $\bar{C}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ នៃ B , C) បង្ហាញថា E_1 និង E_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុង

ចំលើយ

បើ E_1 និង E_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុង ⇔ $E_1\cap E_2=\phi$

គេមាន : $E_1\cap E_2=[(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})]\cap[A\cap(B\cup C)]$

$=A\cap(B\cup\bar{C})\cap[A\cap(B\cup C)]$

$=(A\cap A)\cap[(\overline{B\cup C})\cap(B\cup C)]$

$=A\cap\phi=\phi$

ដោយ $E_1\cap E_2=\phi$ បញ្ជាក់ថា ព្រឹត្តិការណ៍ E_1 និង E_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុង និង គ្នា ។

II. គោលការណ៍ប្រូបាប

ក្នុងមេរៀនមុន ការបកស្រាយភាសាប្រូបាប ជាភាសាសំនុំ មិនអាចអោយយើងសំរេចគោលបំនងបានទេ ។ ដូច្នេះយើងត្រូវរៀបចំរៀប ព្រឹត្តិការណ៍អោយមាន ភាពច្បាស់លាស់ ការងាយបំផុតគឺ ផ្សំព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗទៅនឹងចំនួនពិត ។

ឧទាហរណ៍:

ការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ : សាកល U={1,2,3,4,5,6} ។ បើគេបោះច្រើនដង (រហូត 10.000 ដង) យើងសង្កេតឃើញថាព្រឹត្តិការណ៍ ឯកធាតុនីមួយៗ ដែលអាចចេញមានប្រហែលៗ គ្នា ដូចជា {1} អាចចេញ 1 ដងក្នុង 6 ដង យើងនឹងផ្សំទៅនឹងព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗ នៃសាកល U នូវចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែលទាក់ទងនឹង ចំនួនដង ដែលព្រឹត្តិការណ៍នេះ កើតមានឡើង ។

1. **និយមន័យ :**

គេថាអនុវត្តន៍ $P:\mathcal{P}(U)\to R_+$ ជាប្រូបាបលុះត្រាតែ P ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ :

1). $P(U)=1$

2). $A\subset U;\ B\subset U;$

ដែល $A\cap B=\phi\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

2. វិធានប្រូបាប :

ដោយព្រឹត្តិការណ៍ជាសំណុំរងនៃសកល U គេអាចប្រើប្រជុំ . ប្រសព្វ និង បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ ដើម្បីបង្កើតព្រឹត្តិការណ៍បន្ថែមទៀត ហៅថា ព្រឹត្តិការណ៍សមាស ។

ក. ប្រូបាបព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ :

គេបាន
$$\left.\begin{array}{l} A \cap \bar{A} = \phi \Rightarrow P(A \cap \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \\ A \cup \bar{A} = U \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(U) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

ដូច្នេះ:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A)+P(\bar{A}) = 1 \\ \text{ឬ} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \end{array}}$$

◈ សំគាល់ : ផលបូកនៃប្រូបាបរបស់ព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយគ្នាស្មើនឹង 1

ខ. ប្រូបាបព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន :

$$\phi = \bar{U}$$

$$\Rightarrow P(\phi) = P(\bar{U}) = 1 - P(U) = 1 - 1 = 0$$

ដូច្នេះ : $\boxed{P(\phi) = 0}$

គ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុង :

- A,B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុង កាលណា $A \cap B = \phi$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

- បើ A . B . C ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នាពីរៗ

គេបាន : $\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)}$

ហៅថា ប្រូបាបសរុប

◈ សំគាល់ : រូបមន្តនេះពិតចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ច្រើនរាប់អស់ដែលមិនចុះសំរុងគ្នាពីរៗ

ឃ. ប្រូបាបនៃប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍ :

A , B ជាព្រឹត្តិការណ៍សាមញ្ញពីរ (កាលណា $A \cap B \neq \phi$)

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

ឧទាហរណ៍ 1:

ក. គេហូតយកបៀ 1 សន្លឹកចេញពី ហ៊ូ គេបានសន្លឹកលេខ " 11 គឺ "

- ករណីនេះជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន ⇒ ប្រូបាបស្មើសូន្យ

ខ. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយ ។ គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 7

- ករណីនេះជាព្រឹត្តការណ៍មិនអាចមាន ⇒ ប្រូបាបស្មើសូន្យ

ឧទាហរណ៍ 2:

រកប្រូបាបដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់

ក. ចេញលេខ 1

ខ. ចេញលេខ 1 រឺ លេខ 2

ចំលើយ

តាង **A** : ព្រឹត្តិការណ៍ " គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 1 "

តាង **B** : ព្រឹត្តិការណ៍ " ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 2 "

ក. ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុនីមួយៗ មានប្រូបាបស្មើ $\frac{1}{6}$ ដោយ A ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ ដូច្នេះ $P(A) = \frac{1}{6}$

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ មិនចុះសំរុង គឺ $A \cap B = \phi$

ដូច្នេះប្រូបាបដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 1 និង 2 គឺ :.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\approx 0,333$$

ឧទាហរណ៍ 3:

គេទាញយកបៀរ 1 សន្លឹកដោយចៃដន្យ ពីក្នុងបៀរ 32 សន្លឹក (គេមានតែ : 7,8,9,10,J,K,Q និង A) ។ រកប្រូបាប

ក. បានសន្លឹកអាត់មួយ

ខ. បានសន្លឹកពណ៌ក្រហមមួយ

គ. បានសន្លឹកអាត់មួយ រឺ សន្លឹកក្រហមមួយ

ឃ. មិនបានសន្លឹកអាត់ និង មិនបានសន្លឹកក្រហម

ចំលើយ

ក្នុងបៀរ 32 សន្លឹកមានសន្លឹកអាត់ 4 មានសន្លឹកពណ៌ក្រហម 16

តាង **A** : ព្រឹត្តិការណ៍ " សន្លឹកបៀរទាញបានអាត់ "

តាង **B** : ព្រឹត្តិការណ៍ " សន្លឹកបៀរទាញបានពណ៌ក្រហម "

ក. $P(A)=\frac{CardA}{CardU}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}\approx 0.125$

ខ. $P(B)=\frac{CardB}{CardU}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}=0.5$

គ. ព្រឹត្តិការណ៍ " ទាញបានអាត់ 1 សន្លឹកក្រហម 1" ជាព្រឹត្តិការណ៍ A រឺ B

គេបាន :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

តែព្រឹត្តិការណ៍ " $A\cap B$ " ជាព្រឹត្តិការណ៍ បៀរដែលទាញចេញបានអាត់ និង មានពណ៌ក្រហម ។ " អាត់ " មានពណ៌ក្រហមមានពីរគឺ : អាត់គឺ និង អាត់ការ៉ូ

$$P(A\cap B)=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}\approx 0,562$$

3. ព្រឹត្តិការណ៍សមប្រូបាប :

ក . បើ $A_1=\{e_1\}$, $A_2=\{e_2\},\ldots,A_n=\{e_n\}$

$A_1,A_2,\ldots,A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុនៃពិសោធន៍ដោយចៃដន្យតែមួយ ហើយគេមាន : $P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)$ នោះគេថា ព្រឹត្តិការណ៍ទាំងនេះជា " ព្រឹត្តិការណ៍ សមប្រូបាប " មានន័យថាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុនីមួយៗនៃសាកល U មានប្រូបាបស្មើគ្នា ។

- បើ $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ជា ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នាពីរៗ (រឺ $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ជាបំនែកនៃសាកល U)

គេបាន : $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(U)=1$

$\Leftrightarrow P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$

តែ $P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)$

$\Rightarrow nP(A_i)=1$ ដែល $i\in\{1,2,\ldots,n\}$

ដូច្នេះ $P(A_i)=\frac{1}{n}$

បើ $p=P(A_i)$ គេបានលទ្ធផលនីមួយៗមានប្រូបាបនឹងកើត : $\boxed{p=\frac{1}{n}}$

◈ **សំគាល់ :**

$\{e_1\},\{e_2\},\{e_3\},\ldots,\{e_n\}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុដែលបានមកពីការពិសោធន៍ចៃដន្យមួយ ។ យើងបានសាកល (រឺលំហគំរូសាក) $U=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$

- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗ គឺជាចំនួនមួយស្ថិតនៅចន្លោះ 0 និង 1 $(0\le p\le 1)$
- ផលបូកប្រូបាបនៃគ្រប់ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុស្មើនឹង 1

• ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A មួយ ស្មើនឹងផលបូកប្រូបាប នៃគ្រប់ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ ដែលនៅក្នុង A ។

៣. **ជាទូទៅ** : ក្នុងករណីព្រឹត្តិការណ៍សមប្រូបាប គេបាន :បើសាកល U មាន n ធាតុ (n ជាករណីអាច)ហើយព្រឹត្តិការណ៍ A មួយនៃU មាន p ធាតុ (មាន p ព្រឹត្តិការណ៍ ឯកធាតុ ដែលអាចអោយបាន A រឺ p ជាចំនួនករណីស្រប) ។

នោះ
$$\boxed{P(A) = p\cdot\frac{1}{n} = \frac{p}{n}}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{ចំនួនធាតុនៃA}}{\text{ចំនួនធាតុនៃU}} \quad \text{រឺ} \quad P(A) = \frac{CardA}{CardU}}$$

រឺអាចនិយាយថា : ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ស្មើនឹងផលចែកនៃចំនួនករណីស្រប និង ចំនួនករណីអាច :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}}$$

ឧទាហរណ៍ :

ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 12 គឺក្រហម 5 ស 4 ខ្មៅ 3 គេឧបមាថា ក្នុងការចាប់យកប៊ូលនិមួយៗចេញពីថង់គេមានសមៈប្រូបាប ។

គណនា ប្រូបាប ដើម្បីអោយបានប៊ូល 4 (ចាប់យកជាមួយគ្នា) ដែល :

ក. មានពណ៌ក្រហមទាំង 4

ខ. គ្មានប៊ូលពណ៌ក្រហមសោះ

គ. យ៉ាងតិចបានប៊ូលក្រហមមួយ

ឃ. បានប៊ូលក្រហម1 ស1 ខ្មៅ2

ចំលើយ

ក. ប្រូបាបអោយបានប៊ូលក្រហម 1 :

ចំនួនករណីអាច : C_{12}^4 (ប៊ូល 12 ចាប់យក 4)

ចំនួនករណីស្រប : C_5^4 (ប៊ូលក្រហម 5 ចាប់យក 4)

ដូចនេះ ប្រូបាប គឺ : $P_1 = \frac{C_5^4}{C_{12}^4} = \frac{5}{495} = \frac{1}{99} \approx 0,010$

ខ. ប្រូបាបដែលគ្មានប៊ូលក្រហម :

ករណីអាច : C_{12}^4

ករណីស្រប : C_7^4 (ប៊ូលមិនក្រហមមាន 7 ចាប់យក 4)

ដូចនេះ ប្រូបាប គឺ : $P_2 = \frac{C_7^4}{C_{12}^4} = \frac{35}{495} = \frac{7}{99} \approx 0,070$

គ. ប្រូបាបគេអោយបានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមមួយ :

គឺជាព្រឹត្តិការណ៍ ដែលផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិការណ៍គ្មានប៊ូលក្រហម

$P_3 = 1 - P_2 = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99} \approx 0,929$

ឃ. ប្រូបាបគេអោយចាប់ប៊ូលក្រហម 1 ស 1 ខ្មៅ 2

ករណីអាច : C_{12}^4

ករណីស្រប : $C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^2$ (ប៊ូលក្រហម5 ចាប់យក 1 , ប៊ូលស 4 ចាប់យក 1, ប៊ូលខ្មៅ 3 ចាប់យក 2)

ដូចនេះ ប្រូបាប គឺ : $P_4 = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^2}{C_{12}^4} = \frac{60}{495} \approx 0,121$

4. ប្រូបាបមានលក្ខខ័ណ្ឌ :

ជួនកាលការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ មានឥទ្ធិពលលើប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀត ។ ការគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ពិសេសនេះ កើតឡើងហៅថា ប្រូបាបមានលក្ខខ័ណ្ឌ ។

ឧទាហរណ៍ 1:

គេហូតបៀ 1 សន្លឹកចេញពីហ៊ូ ដោយចៃដន្យ ។
រកប្រូបាបដើម្បីអោយបានសន្លឹក " អាត់ការ៉ូ "

ចំលើយ

តាង **A** : ព្រឹត្តិការណ៍ " សន្លឹកអាត់ "

តាង **B** : ព្រឹត្តិការណ៍ " សន្លឹកការ៉ូ "

គេបាន : $A \cap B$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ " សន្លឹកអាត់ការ៉ូ "

សន្លឹក " ការ៉ូ " ទាំងអស់ មាន 13 $\Rightarrow \text{Card}A = 13$

សន្លឹក "អាត់ការ៉ូ " មានតែ 1 គត់ $\Rightarrow \text{Card}(A \cap B) = 1$

ដូច្នេះ ប្រូបាបដើម្បីអោយបាន សន្លឹក " អាត់ " ដោយដឹងថាជា " ការ៉ូ " គឺ

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}B} = \frac{1}{13}$$

ឧទាហរណ៍ 2 :

ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លី 5 ចុះលេខពី 1 ដល់ 5 គេទាញព្រមគ្នានូវឃ្លី 2 ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ " ផលបូកលេខឃ្លីធំជាង 5 ដាច់ខាត ដោយដឹងថា : ឃ្លីដែលយក ចេញ ជាលេខសេសទាំងពីរ រឺ គូទាំងពីរ " ។

ចំលើយ

តាង **A** : ព្រឹត្តិការណ៍ " ឃ្លីជាលេខសេសទាំងពីរ រឺ គូទាំងពីរ "

តាង **B** : ព្រឹត្តិការណ៍ " ផលបូកលេខឃ្លី ទាំងពីរ ធំជាង 5 ដាច់ខាត "

គេបាន :

$$A = \{\{1,3\},\{1,5\},\{3,5\},\{2,4\}\}$$
$$B = \{\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$$
$$\Rightarrow A \cap B = \{\{1,3\},\{1,5\},\{3,5\},\{2,4\}\}$$

ហើយ $\text{Card}A = 4$, $\text{Card}(A \cap B) = 3$

ដូច្នេះប្រូបាបដើម្បីអោយបាន " ផលបូកឃ្លីទាំងពីរធំជាង 5 ដាច់ខាត ដោយដឹងថាជាលេខសេសទាំងពីរ រឺគូទាំងពីរ គឺ :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

និយមន័យ: A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរ នៃសាកល U ប្រូបាបនៃ ព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើង បើកាលណាព្រឹត្តិការណ៍ B បានកើតឡើង ហៅថា ប្រូបាបមានលក្ខខ័ណ្ឌ (រឺ ប្រូបាបមានលក្ខខ័ណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ **A** ដោយស្គាល់ព្រឹត្តិការណ៍ **B**) តាងដោយ $P(A/B)$

រូបមន្ត : $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ដែល $P(B) \neq 0$

(A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា)

វិបាក : $\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)}$

5. ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទង

កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ A គ្មានឥទ្ធិពលអ្វីទៅលើប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ទេ នោះគេថា ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B មិនទាក់ទងនឹង ព្រឹត្តិការណ៍ A ទេ រឺ ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B មិនទាក់ទងគ្នាទេ ។

ក្នុងករណីនេះ

គេបាន :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

ឧទាហរណ៍ 1:

គេហូតបៀ 1 សន្លឹកពីរដង (ហូតរួចដាក់វិញ) ។រកប្រូបាបដើម្បីអោយបៀទាំងពីរ សន្លឹកនោះជាអាត់ ។

ចំលើយ

តាង **A** : ព្រឹត្តិការណ៍ " បៀទី 1 ជាអាត់ "

តាង **B** : ព្រឹត្តិការណ៍ " បៀទី 2 ជាអាត់ "

ដោយសារគេហូតរួចដាក់ទៅវិញនោះព្រឹត្តិការណ៍ A និង B មិនទាក់ទងគ្នាទេ ។

គេបាន : $P(A)=\dfrac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\dfrac{C_4^1}{C_{51}^1}=\dfrac{4}{52}$

$$P(B)=\frac{C_4^1}{C_{52}^1}=\frac{4}{52}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{4}{52}\times\frac{4}{52}=\frac{4}{13}\approx 0{,}307$$

ឧទាហរណ៍ 2 :

គេមានថង់ពីរ ។ ថង់ទីមួយបាល់ក្រហម 2 និងបាល់ខ្មៅ 3 ចំនែកថង់ទីពីរ មានបាល់ ក្រហម 3 និង បាល់ខ្មៅ 2 ។ បាល់មួយត្រូវយកចេញ ពីថង់នីមួយៗ ។ រកប្រូបាបដែលបាល់ទាំងពីរសុទ្ធតែពណ៌ខ្មៅ ។

ចំលើយ

តាង **A** : ព្រឹត្តិការណ៍ " យកបាល់ខ្មៅ 1 ចេញពីថង់ទីមួយ "

តាង **B** : ព្រឹត្តិការណ៍ " យកបាល់ខ្មៅ 1 ចេញពីថង់ទី ពីរ " គេឃើញថា ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B មិនទាក់ទងគ្នា

គេបាន : $P(A)=\dfrac{C_3^1}{C_5^1}=\dfrac{3}{5}$; $P(B)=\dfrac{C_2^1}{C_5^1}=\dfrac{2}{5}$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}=0{,}24$$

◈ **សំគាល់** : គេអាចកំនត់ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា លើសពី 2 ព្រឹត្តិការណ៍ ។

ដូចជា: A , B និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា

$$\boxed{P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)}$$

6. ប្រូបាបសរុប :

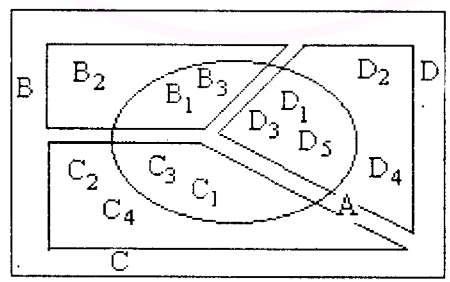
ឧទាហរណ៍ : ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 12 ។ ប៊ូលក្រហមចុះលេខ1 ដល់ 3 ប៊ូលបៃតងចុះលេខ 1 ដល់ 4 ប៊ូលខៀវចុះលេខ 1 ដល់ 5 ។ គណនាប្រូបាបនៃ ព្រឹត្តិការណ៍ : A " ទាញយកប៊ូលបានលេខសេស "

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ " ទាញបានប៊ូលពណ៌ក្រហមលេខសេស "

C : ព្រឹត្តិការណ៍ " ទាញបានប៊ូលពណ៌បៃតងលេខសេស "

D: ព្រឹត្តិការណ៍ " ទាញបានប៊ូលពណ៌ខៀវលេខសេស "

U



របៀបទី 1 :

គេមាន B,C,D ជាបំណែកនៃសាកល U

ព្រោះ $U = B \cup C \cup D$ ហើយ $B \cap C = \phi$, $C \cap D = \phi$, $B \cap D = \phi$

តាមដ្យាក្រាមគេបាន : $P(A) = \dfrac{CardA}{CardU} = \dfrac{7}{12} \approx 0.583$

របៀបទី 2 :

ព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើង បានន័យថា : គេទាញបានប៊ូលក្រហមមានលេខសេស រឺប៊ូលបៃតងមានលេខសេស រឺ ប៊ូលខៀវមានលេខសេស គឺ :

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$$

តែ $(A \cap B), (A \cap C), (A \cap D)$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងនឹងគ្នា

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D)$$

$$= P(B) \cdot P(A/B) + P(C) \cdot P(A/C) + P(D) \cdot P(A/D)$$

ដែល $P(B) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$, $P(C) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$, $P(D) = \dfrac{5}{12}$

$$P(A/B) = \frac{2}{3} \ , \ P(A/C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ , \ P(A/D) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{12} \approx 0.583$$

ជាទូទៅ : គេបាន រូបមន្តប្រូបាបសរុប :

បើ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ជាបំណែកនៃសាកល U ។ គ្រប់ព្រឹត្តិការណ៍ A គេបាន :

$$\boxed{P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \cdots + P(B_n) \cdot P(A/B_n)}$$

7. ចំណាំ

ក. ការដកក្នុងប្រូបាប :

គេសង្កេតឃើញថា " ការដកយកដោយចៃដន្យ " ក្នុងប្រូបាប គេទំលាប់យកភាគគំរូមួយដោយចៃដន្យមកសិក្សា ។ ដើម្បីរើសយកភាគគំរូនេះ គេមានពីររបៀប :

- **របៀបទី 1:**

  យកម្តងទាំងអស់តែម្តងដូចគ្នានឹងយកម្តងមួយៗហើយមិនដាក់ទៅវិញ ។

- **របៀបទី 2 :**

  យកម្តងមួយៗ ក្នុងចំនោមទាំងអស់ (ករណីនេះធាតុដែលយកម្តង ហើយអាចនឹងត្រូវយកម្តងទៀតសារជាថ្មី)ដូចគ្នានឹងយកម្តងមួយៗហើយដាក់ទៅវិញ ។

  - គេតាងចំនួនធាតុទាំងអស់ដោយ N ហើយមានពីរប្រភេទគឺ N_1, N_2 ដែល $N = N_1 + N_2$
  - តាងចំនួនធាតុនៃភាគគំរូ ដោយ n ដែល $n = n_1 + n_2$ (លក្ខខ័ណ្ឌ : $n_1 \le N_1$ និង $n_2 \le N_2 \Rightarrow n \le N$)

ខ. ករណីយកហើយមិនដាក់ទៅវិញ :

ចំនួនភាគគំរូ ដែលមាន n ធាតុស្មើនឹង C_N^n (ចំនួនករណីអាច)

ចំនួនភាគគំរូ ដែលមានសមាសភាព (n_1, n_2) ស្មើនឹង

$C_{N_1}^{n_1} \times C_{N_2}^{n_2}$ (ចំនួនករណីស្រប)

ប្រូបាប ដើម្បីអោយបានភាគគំរូ n_1 នៃប្រភេទទីមួយ N_1 និង n_2 នៃប្រភេទទីពីរ N_2 គឺ:

$$\boxed{P(n_1, n_2) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \times C_{N_2}^{n_2}}{C_N^n}}$$

ឧទាហរណ៍ :

គេហូតយកបៀ 3 សន្លឹកចេញពីហ៊ូដោយចៃដន្យ ។

រកប្រូបាបដើម្បីអោយ បៀ 3 សន្លឹកនេះមាន 2 សន្លឹកជាអាត់ ។

ចំលើយ

បៀ 52 សន្លឹកមាន " អាត់ " 4 និងមិនមែន" អាត់ " 48 បៀ 3 សន្លឹកមាន " អាត់ " 2 និងមិនមែន " អាត់ " 1

- បៀ 3 សន្លឹកយកក្នុងចំនោមបៀ 52 សន្លឹក : គេមានចំនួនករណីអាច C_{52}^{3}
- គេបាន : " អាត់ " 2 យកក្នុងចំនោម"អាត់" 4 គេមាន C_4^2 របៀប

នៅសល់ 1 សន្លឹកមិនមែន"អាត់" យកក្នុងចំនោម 48 សន្លឹក មិនមែន"អាត់"

គេបាន : C_{48}^{1} របៀប ។

(សំគាល់ $n_1=2, n_2=1 \Rightarrow n=3 \quad N_1=4, N_2=48 \Rightarrow N=52$)

ចំនួនករណីស្រប : $C_4^2\times C_{48}^1$

ដូនេះចំនួនប្រូបាបដើម្បីអោយបានអាត់ 2 គឺ :

$$\frac{C_4^2\times C_{48}^1}{C_{52}^3}=\frac{3\times 28}{52\times 25\times 17}=\frac{84}{22100}\approx 0,0038$$

គ. <u>ករណីយកហើយដាក់ទៅវិញ</u> :

ក្នុងករណីនេះ ចំនួនធាតុនៃភាគគំរូមិនមានកំនត់ (ព្រោះគេយកមិនចេះចប់) ។ ការហូតយកម្តងៗ គឺដោយចៃដន្យ ហើយការហូតយកនីមួយៗមិនទាក់ទងគ្នាទេ ។

ប្រូបាបដើម្បីអោយបានធាតុមួយក្នុងប្រភេទទីមួយគឺ $p=\frac{N_1}{N}$

ហើយ ប្រូបាបដើម្បីអោយបានធាតុមួយក្នុងប្រភេទទី ពីរ គឺ $q=1-p=\frac{N_2}{N}$

គេតាងព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម :

A_n : " ធាតុទី n ដែលទាញមកជាធាតុក្នុងប្រភេទទី 1 "

B_n : " ធាតុទី n ដែលទាញមកជាធាតុក្នុងប្រភេទទី 2 "

(<u>សំគាល់</u> : $B_n=\overline{A}_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃ A_n)

ដោយសារគេទាញមកហើយដាក់ទៅវិញ គេបាន :

$\forall n\in N \quad ; \quad P(A_n)=p, P(B_n)=q$

(<u>សំគាល់</u> $P(B_n)=P(\overline{A}_n)=1-P(A_n)=1-p=q$)

តែដោយសារព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗមិនទាក់ទងគ្នានោះ ប្រូបាបនៃប្រសព្វស្មើនឹងផលគុណនៃប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗ ។

ដូចជា : $P(A_1\cap A_2\cap B_3\cap A_4\cap B_5)=p\cdot p\cdot q\cdot p\cdot q=p^3q^2$

ជាវិបាកគំរូទាំងឡាយដែលមាន n_1 ធាតុនៃប្រភេទទីមួយ និង n_2 ធាតុនៃប្រភេទទីពីរ មានប្រូបាបស្មើគ្នាទាំងអស់គឺ $p^{n_1}\times q^{n_2}$ (ទោះជាលំដាប់ធាតុទាំងនោះយ៉ាងណាក៏ដោយ) ។

គេដឹងថា <u>របៀបទាំងអស់</u> ដែលអាចអោយយើងយកគំរូមួយដែលមាន n_1 ធាតុនៃប្រភេទទី 1 និង n_2 ធាតុនៃប្រភេទទី 2 ស្មើនឹង <u>ចំនួនរបៀប ជ្រើសរើសយក</u> n_1 ធាតុ ក្នុងចំនោម n ធាតុ ($n=n_1+n_2$)

ដូច្នេះប្រូបាបដើម្បីបាន គំរូមួយមាន n_1 ធាតុ នៃប្រភេទទី 1 និង n_2 ធាតុនៃប្រភេទទី 2 គឺ : $C_n^{n_1}\times p^{n_1}\times q^{n_2}$

- **ជាទូទៅ** : ប្រូបាប ដើម្បីអោយបានគំរូមួយដែលមាន n ធាតុហើយដែលមាន k ធាតុក្នុប្រភេទទី 1 គឺ :

$$\boxed{P(k, n-k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}}$$

 រឺ $\boxed{B(n,p) \Leftrightarrow P(X=k)=C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$

ហៅថា ច្បាប់ទ្វេធា រឺ ច្បាប់ **Bernouilli** ដែល :

- n ជាចំនួនដងនៃការធ្វើវិញ្ញាសាដដែលៗ
- p ជាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A_n
- $q=1-p$ ជាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ $\overline{A}_n$ រឺ B_n
- X ជាចំនួនដងដែលព្រឹត្តិការណ៍ A_n កើតឡើង

ឧទាហរណ៍ 1:

នៅក្នុងរោងចក្រមួយមានម៉ាស៊ីន 10 ដូចៗគ្នា ។ គេដឹងថាប្រូបាបដើម្បីអោយ ម៉ាស៊ីននីមួយៗខូច ស្មើនឹង 0,10ហើយម៉ាស៊ីនទាំងនោះមិន ទាក់ទង គ្នាទេ។ តើប្រូបាបដើម្បីអោយម៉ាស៊ីន 2 ខូចស្មើប៉ុន្មាន ?

ចំលើយ

តាង k ជាចំនួនម៉ាស៊ីនដែលរើសយកក្នុងចំនោមម៉ាស៊ីន 10 គឺ : C_{10}^k របៀប ប្រូបាបដើម្បីអោយ k ម៉ាស៊ីនខូច និង (10-k) ម៉ាស៊ីនផ្សេងទៀតល្អគឺ :

$$p^k \times q^{10-k} = (0,1)^k \times (0,9)^{10-k}$$

ដូច្នេះប្រូបាបដើម្បីអោយ k ម៉ាស៊ីនខូច ក្នុងចំនោម 10 ម៉ាស៊ីនគឺ :

$$C_{10}^k \times p^k \times q^{10-k} = C_{10}^k \times (0,1)^k \times (0,9)^{10-k}$$

- ចំពោះ k=2, គេបានប្រូបាបដើម្បីអោយម៉ាស៊ីន 2 ខូចគឺ :

$$C_{10}^2 \times (0,1)^2 \times (0,9)^8 = 0,182$$

ឧទាហរណ៍ 2 :

គេហូតបៀ 3 សន្លឹកចេញពី បៀ 32 សន្លឹកដោយចៃដន្យ ។ គេតាង X ជាចំនួនសន្លឹក " ក្រមុំ " ដែលអាចមាននៅក្នុងបៀ 3 សន្លឹកដែលហូតចេញ ។ បើ k ជាធាតុនៃសំនុំ {0,1,2,3,4} ចូរគណនា ប្រូបាបដើម្បីអោយ $X=k$ ក្នុងករណី ខាងក្រោម :

ក. គេទាញបៀទាំង 3 សន្លឹកព្រមគ្នា

ខ. គេទាញម្តងមួយសន្លឹក ហើយដាក់ទៅវិញ

ចំលើយ

ក. <u>ករណីទាញបៀទាំង 3សន្លឹកព្រមគ្នា</u> :

- បៀ 3 សន្លឹកទាញយកក្នុងចំនោមបៀ 32 សន្លឹក គេបាន :

ចំនួនករណីអាច : C_{32}^3

ក្នុងចំនោមបៀ 3 សន្លឹក ដែលទាញចេញអាចមាន ក្រមុំ យ៉ាងច្រើនត្រឹម 3 ។

ដូច្នេះ X ជាចំនួនក្រមុំ អាចមានតំលៃ :

$X=0$ (គ្មាន" ក្រមុំ " សោះ)

រឺ $X=1$ (មាន " ក្រមុំ " មួយ)

រឺ $X=2$ (មាន " ក្រមុំ " ពីរ) រឺ , $X=3$ (មាន " ក្រមុំ " បី)

$\Rightarrow X=4$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចកើតមាន

- យើងជ្រើសរើស " ក្រមុំ " ចំនួន k ក្នុងចំនោម " ក្រមុំ " 4

គេបាន : ចំនួនករណីអាច C_4^k

នៅសល់បៀ ($3-k$) ទៀតយកក្នុងចំនោម បៀ 28 សន្លឹកដែលមិនមែន សន្លឹក "ក្រមុំ" គឺ : C_{28}^{3-k}

ចំនួនករណីស្រប : $C_4^k \times C_{28}^{3-k}$

ប្រូបាប $P(X=k)=\dfrac{C_4^k \times C_{28}^{3-k}}{C_{32}^3}=\dfrac{C_4^k \times C_{28}^{3-k}}{4960}$

បើ $k=0 \Rightarrow P(X=0)=\dfrac{C_4^0 \times C_{28}^3}{4960}=\dfrac{3276}{4960}=0{,}61$

$k=1 \Rightarrow P(X=1)=\dfrac{C_4^1 \times C_{28}^2}{4960}=\dfrac{1512}{4960}=0{,}30$

$k=2 \Rightarrow P(X=2)=\dfrac{C_4^2 \times C_{28}^1}{4960}=\dfrac{168}{4960}=0{,}03$

$k=3 \Rightarrow P(X=3)=\dfrac{C_4^3 \times C_{28}^0}{4960}=\dfrac{4}{4960}$

ខ. ករណីទាញហើយដាក់ទៅវិញ

ដោយគេទាញ ហើយដាក់ទៅវិញ មុននឹងទាញមួយទៀត គេបាន ព្រឹត្តិការណ៍មិន ទាក់ទងគ្នា ។ ក្នុងការទាញបៀ 1សន្លឹក ចេញមកគេមានព្រឹត្តិការណ៍ពីរ :

A : ព្រឹត្តិការណ៍ "បានសន្លឹក ក្រមុំ"

$\overline{A}$: ព្រឹត្តិការណ៍ "មិនមែនសន្លឹក ក្រមុំ"

$P(A)=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}\approx 0{,}125$

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$ ($\overline{A}$ ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃព្រឹត្តិការណ៍ A)

ប្រូបាប ដើម្បីបាន ($X=k$) ក្រមុំ k ដង ហើយសន្លឹកមិនមែន "ក្រមុំ" ($3-k$) ដងគឺ :

$$p^k \cdot q^{3-k}=[p(A)]^k \cdot [p(\overline{A})]^{3-k}=(\frac{1}{8})^k \cdot (\frac{7}{8})^{3-k}$$

តាមការប្រែប្រួលនៃច្បាប់ Bernouilli $B(3\ ;\ 0{,}125)$ គេបាន

ប្រូបាប ដើម្បី បានសន្លឹក "ក្រមុំ" ចំនួន k ក្នុងចំនោមការទាញបីដងគឺ :

$$C_3^k(\frac{1}{8})^k \cdot (\frac{7}{8})^{3-k}$$

បើ $k=0 \Rightarrow P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{8})^0(\frac{7}{8})^3=\dfrac{343}{512}\approx 0{,}66$

$k=1 \Rightarrow P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{8})^1(\frac{7}{8})^2=\dfrac{147}{512}\approx 0{,}28$

$k=2 \Rightarrow P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^1=\dfrac{21}{512}\approx 0{,}04$

$k=3 \Rightarrow P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{8})^3(\frac{7}{8})^0=\dfrac{1}{512}\approx 0{,}001$

$k=4 \Rightarrow P(X=4)=p(\phi)=0$ (ព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចកើតមាន)

ឧទាហរណ៍ 3 :

គេដាំពោត 10 គ្រាប់ក្នុងរណ្តៅមួយដែលគ្រាប់ពោត នីមួយៗមាន ប្រូបាប ដើម្បីដុះស្មើនឹង 0,8 ។

ក. គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយគ្រាប់ពោតក្នុងរណ្តៅនោះដុះបាន 6 ដើមជាប្រាកដ (គេសន្មតថាការដុះនៃគ្រាប់ពោតនីមួយៗមិនទាក់ទងគ្នា) ។

ខ. គេដឹងថា បើដើមពោតដុះឡើង នោះប្រូបាបដើម្បីអោយ ដើមនីមួយៗមានផ្លែស្មើនឹង 0,6 ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីអោយបានដើមពោត មានផ្លែយ៉ាងតិចមួយដើម ដោយដឹងថា ដើមពោតបានដោះ 6 ដើមក្នុងរណ្តៅ (គេសន្មតថាការមានផ្លែនៃដើមពោតនីមួយៗ មិនទាក់ទងគ្នា) ។

ចំលើយ

តាង A ព្រឹត្តិការណ៍ "គ្រាប់ពោតក្នុងរណ្តៅដុះឡើង"

$\overline{A}$: ព្រឹត្តិការណ៍ "គ្រាប់ពោតក្នុងរណ្តៅមិនដុះ"

គេបាន :

$P(A)=0{,}8 \Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}8=0{,}2$

- ប្រូបាបដើម្បីអោយពោត 6 ដើមដុះឡើង និង

  4 ដើមមិនដុះគឺ : $(0,8)^6\times(0,2)^4$

- តែគ្រាប់ពោត ដុះក្នុងរណ្តៅមាន 6 ដើមគេបាន :

  $C_{10}^{6}=210$ របៀប

ដូច្នេះប្រូបាបដើម្បីអោយពោត 6 ដើមដុះក្នុងចំនោម 10 ដើមដែលដាំគឺ :

$$P(A)=C_{10}^{6}\times(0,8)^6\times(0,2)^4\approx 0,000422$$

ខ. តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ដើមពោតគ្មានផ្លែសោះ

$\Rightarrow P(\overline{B})=1-0,6=0,4$

- តែដើមពោត គ្មានផ្លែ ដោយដឹងថាដើមពោតបានដុះ ក្នុងរណ្តៅ 6 ដើ
  គឺជាប្រូបាបមានលក្ខខ័ណ្ឌ ។

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)\times P(B/A)\\&=\left[C_{10}^{6}\times(0,8)^6\times(0,2)^4\right]\times(0,4)^6\\&\approx 0,000\,422\times 0,004\,096\approx 0,000\,0017\end{aligned}$$

ដូច្នេះប្រូបាប ដើម្បីអោយបានដើមពោត មានផ្លែយ៉ាងតិចមួយដើមដោយដឹង ថាដើមពោតបានដុះ 6 ដើមក្នុងរណ្តៅគឺ :

$1-P(A\cap B)=1-0,000\,0017\approx 0,999$

លំហាត់

លំហាត់

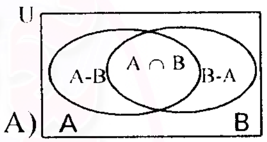
1. គេសន្មតថា : $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

ក. បញ្ជាក់ថា : $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

ខ. បញ្ជាក់ថា ការកើតឡើងនៃ $A\Delta B$ សមមូលនឹងការកើតឡើងនៃ ព្រឹត្តិការណ៍តែមួយគត់ក្នុងចំណោមព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ។

ចំលើយ

ក. បញ្ជាក់ថា $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$



គេមាន $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

$\Rightarrow x\in A\Delta B \Leftrightarrow (x\in A-B)$ ឬ $(x\in B-A)$

$\Leftrightarrow (x\in A\text{ និង }x\notin B)$ ឬ $(x\in B\text{ និង }x\notin A)$

ដោយឈ្នាប់ និង មានលក្ខណៈបំបែក ចំពោះឈ្នាប់ឬ ឯឈ្នាប់ឬ មានលក្ខណៈ បំបែកចំពោះឈ្នាប់និង គេបាន :

$[(x\in A\text{ និង }x\notin B)\text{ ឬ }(x\in B\text{ និង }x\notin A)]$

$\Leftrightarrow [(x\in A\text{ និង }x\notin B)\text{ ឬ }x\in B]$ និង $[(x\in A\text{ និង }x\notin B)\text{ ឬ }x\notin A]$

$\Leftrightarrow [(x\in A\text{ ឬ }x\in B)\text{ និង }(x\notin B\text{ ឬ }x\in B)$ និង $(x\in A\text{ ឬ }x\notin A)$

និង $(x\notin B\text{ ឬ }x\notin A)]$

$\Leftrightarrow [(x\in A\cup B)\text{ និង }(x\in \overline{B}\cup B)\text{ និង }(x\in\overline{A}\cup A)\text{ និង }(x\in\overline{A}\cup\overline{B})]$

បានសេចក្តីថា :

$$\begin{aligned}A\Delta B&=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)\cap(\overline{A}\cup A)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=(A\cup B)\cap U\cap U\cap(\overline{A}\cup A)\end{aligned}$$

(ព្រោះ $\overline{B}\cup B=U$ និង $\overline{A}\cup A=U$)

នោះគេបាន :

$$A\Delta B=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$$
$$=(A\cup B)-(A\cap B)$$

ដូច្នេះ $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

ខ.បញ្ជាក់ថាការកើតឡើងនៃ $A\Delta B$ សមមូលនឹងការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍តែមួយគត់ ក្នុងចំនោមព្រឹត្តិការណ៍ A និង B :

បើ $A\Delta B$ កើតឡើងនោះការពិត $r\in A\Delta B$

$r\in A\Delta B \Leftrightarrow r\in(A\cup B)-(A\cap B)$

$r\in(A\cup B)-(A\cap B)$ មានន័យថា

$[r\in(A\cup B)$ និង $r\notin(A\cap B)]$ គឺបើ $r\in A$ នោះ $r\notin B$ និង

បើ $r\in B$ នោះ $r\notin A$ ។

ដូច្នេះ បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតឡើងនោះ B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលមិនកើតឡើងទេ និងបើ B កើតឡើង , A មិនកើតឡើងទេ ។

លំហាត់

2.គេអោយសាកល U (រឺលំហាគំរូសាក U) និងព្រឹត្តការណ៍ A,B,C ដែល :

$U=\{0,1,2,3,4,5\}$

$A=\{0,1,2\}, B=\{1,3,5\}, C=\{3\}$

សរសេរឃ្លាខាងក្រោមអោយមានរាងជា $r\in X$:

ក. ព្រឹត្តិការណ៍មួយយ៉ាងតិចអាចកើតឡើងក្នុងចំណោមព្រឹត្តិការណ៍ទាំងបី

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍តែមួយគត់អាចកើតឡើង

គ. ព្រឹត្តិការណ៍ពីរយ៉ាងតិចក្នុងបីអាចកើតឡើង

ឃ. ព្រឹត្តិការណ៍មួយយ៉ាងច្រើនអាចកើតឡើង

ចំលើយ

ក. ព្រឹត្តិការណ៍មួយយ៉ាងតិច អាចកើតឡើងក្នុងចំណោមព្រឹត្តិការណ៍ទាំងបី :

$r\in A$ ឬ $r\in B$ ឬ $r\in C$

$\Rightarrow r\in A\cup B\cup C$

$r\in\{0,1,2\}\cup\{1,3,5\}\cup\{3\}=\{0,1,2,3,5\}$

ដូច្នេះ $r\in\{0,1,2,3,5\}$

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍តែមួយគត់អាចកើតឡើង :

តាមលំហាត់លេខ 1 ខាងលើគេបាន :

$r\in A\Delta B\Delta C=\{\{0,1,2\}\Delta\{1,3,5\}\Delta\{3\}\}$

$=\{0,2,3,5\}\Delta\{1,3\}=\{0,2,5\}$

ដូច្នេះ $r\in\{0,2,5\}$

គ. ព្រឹត្តិការណ៍ពីរយ៉ាងតិចក្នុងបី អាចកើតឡើង :

$r\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$\Leftrightarrow r\in\{\{1\}\cup\phi\cup\{3\}\}=\{1,3\}$

ដូច្នេះ $r\in\{1,3\}$

ឃ. ព្រឹត្តិការណ៍មួយយ៉ាងច្រើនអាចកើតឡើង :

យើងអាចបានពីរករណីគឺ:

- គ្មានព្រឹត្តិការណ៍ណាមួយអាចកើតឡើង :

គេបាន $r\in\overline{A\cup B\cup C}$ គឺ $r\in\{4\}$

- ព្រឹត្តិការណ៍តែមួយគត់កើតឡើង :

តាមចំលើយ ខ យើងបាន $r\in A\Delta B\Delta C$ គឺ $r\in\{0,2,5\}$

មានព្រឹត្តិការណ៍មួយយ៉ាងច្រើនកើតឡើង បានសេចក្តីថាគ្មានព្រឹត្តិការណ៍

ណាមួយកើតឡើង ឬ មានតែព្រឹត្តិការណ៍តែមួយគត់កើតឡើងគឺ :

$$r \in (\{4\}) \cup \{0,2,5\} = \{0,2,4,5\}$$

លំហាត់

3. ក្នុងការអង្កេតផ្នែកស្ទង់មតិមួយ គេបញ្ចូលលទ្ធផលដែលបានទៅក្នុងក្រដាសបោះ មួយ ។ លើក្រដាសនេះគេដាក់ : ភេទនៃមនុស្ស អាយុ (លើសពី 30ឆ្នាំ ឬ តិចជាង 30 ឆ្នាំ) និងចំលើយនៃសំនួរដែលសួរ "ត្រូវ ឬ ខុស" ។ គេយកក្រដាសបោះនេះមួយសន្លឹក

ក. តើមានករណីអាចប៉ុន្មាន ? តើវិញ្ញាសា នេះត្រូវនិងសាកលណា ?

ខ. ដោយសារករណីអាចយកមកប្រើ បញ្ជាក់ព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

a). គឺជាមនុស្សមានអាយុតិចជាង 30ឆ្នាំ

b). គឺជាស្ត្រី

c). គឺជាមនុស្សមានអាយុច្រើនជាង 30ឆ្នាំ

d). គឺជាមនុស្សម្នាក់ដែលបាននិយាយថាខុស ឬ ដែលមានអាយុតិចជាង 30ឆ្នាំ

ចំលើយ

ក. • ភេទនៃមនុស្សមានពីរគឺ : ស្រី និង ប្រុស

• អាយុមានពីរគឺ : លើសពី 30ឆ្នាំ , តិចជាង 30ឆ្នាំ

• ចំលើយមានពីរគឺ : ខុស និង ត្រូវ

តាង a : មនុស្សស្រី , b : មនុស្សប្រុស

c : អាយលើស 30ឆ្នាំ , d : អាយុតិចជាង 30ឆ្នាំ

e : ចំលើយខុស , f : ចំលើយត្រូវ

គេបាន : ចំនួនករណីអាច $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

យក U ជាសាកលវិ លំហាត់រូសាក គេបាន :

$U = \{ (a,e,c), (a,e,d), (a,f,c), (a,f,d), (b,e,c), (b,e,d), (b,f,c), (b,f,d) \}$

ខ. ដោយប្រើករណីអាចបញ្ជាក់ពីព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

a). តាង A ព្រឹត្តិការណ៍ " មនុស្សមានអាយុតិចជាង 30ឆ្នាំ "

$A = \{ (a,e,d), (a,f,d), (b,e,d), (b,f,d) \}$

b). តាង B ព្រឹត្តិការណ៍ " គឺជាស្ត្រី "

គេបាន : $B = \{ (a,e,c), (a,e,d), (a,f,c), (a,f,d) \}$

c). តាង C ព្រឹត្តិការណ៍ " មនុស្សមានអាយុលើសពី 30ឆ្នាំ "

គេបាន : $C = \{ (a,e,c), (a,f,c), (b,e,c), (b,f,c) \}$

d). តាង D ព្រឹត្តិការណ៍ " គឺជាមនុស្សម្នាក់ដែលបាននិយាយខុសរឺ ដែលមានអាយុតិចជាង 30ឆ្នាំ "

D ជាប្រជុំនៃព្រឹត្តិការណ៍ពីរគឺ : D_1 និង D_2 ដែល :

D_1 ព្រឹត្តិការណ៍ : " មនុស្សម្នាក់និយាយខុស "

D_2 ព្រឹត្តិការណ៍ : " មានអាយុតិចជាង 30ឆ្នាំ "

គេបាន : $D_1 = \{ (a,e,c), (a,e,d), (b,e,c), (b,e,d) \}$

$D_2 = \{ (a,e,d), (a,f,d), (b,e,d), (b,f,d) \}$

$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = \{ (a,e,c), (a,e,d), (b,e,c), (b,e,d), (a,e,d), (a,f,d), (b,e,d), (b,f,d) \}$

លំហាត់

4. គេទំលាក់ប្រាក់កាក់បីដងជាប់គ្នា ។ បើគេបានតរៀងគ្នានូវ មុខ ខ្នង មុខ នោះករណីអាច អាចសរសេរជា FPF ។

ក. តើមានករណីអាចប៉ុន្មាន ?

ខ. បញ្ជាក់ ករណីអាច ខាងក្រោម :

a. មុខ F ចេញយ៉ាងតិចពីរដង

b. មុខ F ចេញពីរដងបន្តបន្ទាប់គ្នា

c. គ្មានលទ្ធផលដូចគ្នាចេញពីរដងជាប់គ្នា

ចំលើយ

ក. ចំនួនករណីអាច :

បើគេបោះគ្រាប់កាក់បីដង ជាប់គ្នាគេអាចបានករណីដូចខាងក្រោមនេះ :

FPF , FFP , PFF , PPF , PFP , FPP , FFF និង PPP ។

ដូច្នេះ ករណីអាចទាំងអស់មានចំនួន 8 ។

ខ. a. មុខ F ចេញយ៉ាងតិចពីរដង : FFP , PFF , FPF , FFF

b. មុខ F ចេញពីរដងបន្តបន្ទាប់គ្នា : FFP , PFF

c. គ្មានលទ្ធផលដូចគ្នាចេញពីរដងជាប់គ្នា : FPF , PFP

លំហាត់

5. ក្រោយពីការស្ទង់មតិក្នុងចំនោមអ្នកអានទស្សនាវដ្តី បី a , b , c មក គេឃើញថា ក្នុងចំនោមមនុស្សដែលបានសួរចំលើយមាន :

45% អាន a , 45% អាន b , 35% អាន c , 15% អាន a និង b

10% អាន b និង c , 15% អាន c និង a , 5% អាន a , b និង c

គេជ្រើសរើសមនុស្សម្នាក់ X ដោយចៃដន្យ ក្នុងចំនោមមនុស្សដែលបានសួរចំលើយ ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

ក. X មិនអានទស្សនាវដ្តីណាមួយសោះ

ខ. X អានទស្សនាវដ្តីពីរគត់

គ. X អាន a តែមិនអាន c

ឃ. X អាន a តែបានអានទស្សនាវដ្តីមួយទៀតរួចមកហើយ

ចំលើយ

តាង A ព្រឹត្តិការណ៍ " X អានទស្សនាវដ្តី a "

B ព្រឹត្តិការណ៍ " X អានទស្សនាវដ្តី b "

C ព្រឹត្តិការណ៍ " X អានទស្សនាវដ្តី c "

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ " X មិនអានទស្សនាវដ្តីណាមួយសោះ "

ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយពីព្រឹត្តិការណ៍ " X អានទស្សនាវដ្តី a រឺ b រឺ c "

គឺ $\overline{A \cup B \cup C}$

គេបាន: $P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

តែ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$

$$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$= 0{,}45 + 0{,}45 + 0{,}35 - 0{,}15 - 0{,}10 - 0{,}15 + 0{,}05$$
$$= 0{,}90$$

$\Rightarrow P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$

ខ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ " X អានទស្សនាវដ្តីពីរគត់ "

ព្រឹត្តការណ៍អានទស្សនាវដ្តី តែពីរគត់គឺ :

$[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$

តែ $P[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]$

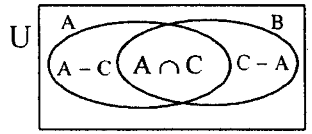
$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)$$
$$- P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$
$$= 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}15 - 2 \times 0{,}05 = 0{,}30$$

គេបាន : $P\{[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)\}$

$$= P[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] - P(A \cap B \cap C)$$
$$= 0{,}30 - 0{,}05 = 0{,}25$$

គ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ " X អានទស្សនាវដ្ដី A តែមិនអាន C " :

គឺជាព្រឹត្តិការណ៍ $(A-C)$



ដោយ $A=(A\cap C)\cup(A-C)$

$$\Rightarrow P(A)=P(A\cap C)+P(A-C)-P[(A\cap C)\cap(A-C)]$$

$$=P(A\cap C)+P(A-C)$$

(ព្រោះ $(A\cap C)\cap(A-C)=\phi\Rightarrow P[(A\cap C)\cap(A-C)]=0$)

$$\Rightarrow P(A-C)=P(A)-P(A\cap C)=0{,}45-0{,}15=0{,}30$$

ឃ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ " X អាន A តែបានអានទស្សនាវដ្ដី មួយទៀតរួចហើយ "

គឺជាប្រូបាបមានលក្ខខ័ណ្ឌ :

$$P(A/B\cup C)=\frac{P[(B\cup C)\cap A]}{P(B\cup C)}=\frac{P[(A\cap B)\cup(A\cap C)]}{P(B\cup C)}$$

$$=\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(B)+P(C)-P(B\cap C)}$$

$$=\frac{0{,}15+0{,}15-0{,}05}{0{,}45+0{,}35-0{,}10}=\frac{0{,}25}{0{,}70}=0{,}36$$

លំហាត់

6. គេអោយរៀបកាស 9 ដែលមានសរសេរលេខរៀង 1 , 2 , 3 , ... ,9 ទៅក្នុងការេដែលមាន 9 ក្រឡា ។

ក. តើគេអាចរៀបកាសទាំង 9 បានប៉ុន្មានបែប ?

ខ. តើគេអាចរៀបកាសនៅជួរទីមួយនៃការេបានប៉ុន្មានបែប ?

គ. ចូររកប្រូបាបដើម្បីអោយកាសលេខ 1និង 2លេខ នៅជួរទីមួយ

ចំលើយ

ក. របៀបរៀបកាសទាំង 9

ការរៀបកាសបំពេញក្រឡាទាំង 9នៃការេ ក៏ដូចជាការរៀបកាសបំពេញក្រឡា 9 ដែលយើងដាក់ជាមួយជួរដែរ ពោលគឺយើងយកជួរទាំងបីមកបន្តកន្ទុយគ្នា ។

ដូចនេះចំនួននៃរបៀបរៀបកាសទាំង 9 ជាចំនួនចំលាស់នៃលេខទាំង 9 :

$$n_1=P_9=9!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9=362880$$

ខ. របៀបរៀបកាសនៅជួរទីមួយ

យើងត្រូវយកកាសបីក្នុងចំនោមកាសទាំង 9 មករៀបដូច្នេះចំនួនដែលយើងរកគឺជាចំនួនចំរៀប 3ធាតុយកក្នុងចំនោម 9 :

$$n_2=A_9^3=9\times8\times7=504$$

គ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍បានលេខ 1 និង 2 នៅជួរទីមួយ

យើងដឹងថាចំនួនករណីអាចដើម្បីរៀបកាសទាំង 9គឺ $n_1=9!$ ។ ដើម្បីបានករណីស្របមួយយើងត្រូវយកកាសលេខ 1និងលេខ 2 ហើយនិងកាសមួយទៀតពីកាស 7 ផ្សេងពី 1និង 2 មករៀបនៅក្នុងជួរទីមួយ រួចយកកាសទាំង6 ដែលនៅសល់មករៀបក្រឡាទាំង 6 នៅជួរទី 2 និងទី 3 ។

យើងមាន 3! បែបសំរាប់រៀបជួរទី 1 ហើយនឹង 6! បែបសំរាប់រៀបជួរទី2 និងទី 3 ។ ដោយយើងអាចជ្រើសរើសកាសមួយទៀតសំរាប់បំពេញជួរទី 1 បាន 7 របៀប ដូច្នេះចំនួនករណីស្របគឺ :

$$n_3=3!\times6!\times7=6\times720\times7=30240$$

គេបានប្រូបាបដើម្បីអោយ កាសលេខ1 និង លេខ 2 នៅជួរទីមួយគឺ :

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{30240}{362880} \approx 0{,}083$$

លំហាត់

7. គេមានអង្កត់ 5 ដែលមានប្រវែងរៀងគ្នា 1,3,5,7 និង 9cm ។ គេចាប់យក អង្កត់ 3 ដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាបដើម្បី អោយអង្កត់ទាំង 3 នេះបង្កើត បានជាត្រីកោណមួយ ។

ចំលើយ

ប្រូបាបដើម្បីអោយគេចាប់បានអង្កត់បីបង្កើតបានជាត្រីកោណមួយ

តាង A : " ចាប់យកបានអង្កត់បីបង្កើតបានជាត្រីកោណមួយ " ចំនួននៃការ ចាប់យកអង្កត់បី ដោយចៃដន្យក្នុងចំនោមអង្កត់ប្រាំ ដោយមិនគិតពីលំដាប់ គឺជាចំនួនបន្សំ 3 ធាតុក្នុងចំនោម 5 ធាតុ ។ ដូចនេះចំនួនករណីអាចមាន :

$$n = C_5^3 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$$

របៀបចាប់យកអង្កត់ទាំង 10 នេះគឺ :

(1,3,5) ; (1,3,7) ; (1,3,9) ; (1,5,7) ; (1,5,9) ; (1,7,9) ; (3,5,7) ; (3,5,9) ; (3,7,9) ; (5,7,9)

តែអង្កត់បី បង្កើតបានជាត្រីកោណមួយលុះត្រាតែផលបូកជ្រុងពីរ ធំជាងជ្រុងមួយ $(a+b>c\,;\,a+c>b\,;\,b+c>a)$

ក្នុង 10 របៀបខាងលើ មានតែ3 របៀបទេដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ : ផលបូកជ្រុងពីធំជាងជ្រុងមួយគឺ : (3,5,7) ; (3,7,9) ; (5,7,9) ។

ដូចនេះករណីស្របមាន : $p = 3$

ប្រូបាបដើម្បីអោយអង្កត់បីបង្កើតបានត្រីកោណមួយគឺ :

$$P(A) = \frac{p}{n} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

លំហាត់

8. គេមានប្រអប់ពីរ ដែលប្រអប់ទីមួយ មានឃ្លី 5 ចុះលេខពី 1 ដល់ 5 , ប្រអប់ទីពីរ មានឃ្លី 5 ចុះលេខពី 6 ដល់ 10 ។ គេយកឃ្លីមួយពីប្រអប់នីមួយៗ ។ គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយផលបូកលេខលើឃ្លីទាំងពីរដែលយកចេញ :

ក. មិនតូចជាង 7 , ខ. ស្មើនឹង 11 , គ. មិនធំជាង 11

ចំលើយ

ក. ប្រូបាបដើម្បីអោយផលបូកលេខលើ ឃ្លីទាំងពីរ ដែលគេយកចេញមិនតូចជាង 7

ដើម្បីអោយងាយក្នុងការគណនាផលបូកលើឃ្លីទាំងពីរ ដែលយកចេញ យើងប្រើតារាង ដូចខាងក្រោម :

ប្រ I / ប្រ II	1	2	3	4	5
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)
7	(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)
8	(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)
9	(9,1)	(9,2)	(9,3)	(9,4)	(9,5)
10	(10,1)	(10,2)	(10,3)	(10,4)	(10,5)

តាមតារាង , យើងបាន :

ចំនួនករណីអាច គឺ : $n = 25$

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ " ផលបូកលេខលើឃ្លីទាំងពីរមិនតូចជាង 7 "

តាមតារាង យើងឃើញថា ផលបូកលេខលើឃ្លីទាំងពីរដែលគេយកចេញ សុទ្ធតែធំជាង រឺ ស្មើនឹង 7 ដូច្នេះ :

ចំនួនករណីស្របគឺ : $p = 25$

ប្រូបាបដើម្បីអោយផលបូកលេខលើឃ្លីមិនតូចជាង 7 គឺ :

$$P(A) = \frac{p}{n} = \frac{25}{25} = 1$$

ខ. ប្រូបាបដើម្បីអោយផលបូកលេខលើឃ្លីទាំងពីរស្មើនឹង 11

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ " ផលបូកលេខលើឃ្លីទាំងពីរស្មើនឹង 11 "

តាមតារាង ផលបូកលេខលើឃ្លីដែលយកចេញស្មើនឹង 11 មានតែ 5 របៀបទេគឺ : (6,5);(7,4);(8,3);(9,2);(10,1) ។

ដូចនេះចំនួនករណីស្របគឺ : $p_1 = 5$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{p_1}{n} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

គ. ប្រូបាបដើម្បីអោយផលបូកលេខលើឃ្លីទាំងពីរមិនធំជាង 11

តាង C : ព្រឹត្តិការណ៍ " ផលបូកលេខលើឃ្លីទាំងពីរមិនធំជាង 11 "

តាមតារាង ផលបូកលេខលើឃ្លីដែលយកចេញមិនធំជាង 11 (តូចជាង រឺ ស្មើ 11) មាន 15 របៀប ដូចនេះ ចំនួនករណីស្របគឺ : $p_2 = 15$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{p_2}{n} = \frac{15}{25} = 0{,}6$$

លំហាត់

9. ក្នុងស្បោងមួយមានប៊ូល ស 5 និង ប៊ូល ខ្មៅ 3 ។ គេទាញយកប៊ូលពីរ

ក. គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយប៊ូលទាំងពីរនោះមានពណ៌ដូចគ្នា ។

ខ. គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយប៊ូលទាំងពីរមានពណ៌ខុសគ្នា ។

ចំលើយ

ក្នុងប៊ូល 8 មានប៊ូល ស 5 និង ប៊ូល ខ្មៅ 3 ។

ចំនួនករណីអាច : $N = C_8^2 = \frac{8\times 7}{2\times 1} = 28$

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ " ទាញយកប៊ូលពីរមានពណ៌ ស "

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ " ទាញយកប៊ូលពីរមានពណ៌ ខ្មៅ "

តាង C : ព្រឹត្តិការណ៍ "ទាញយកប៊ូលពីរមានពណ៌ខុសគ្នា គឺ មួយស , មួយខ្មៅ "

> $A \cup B$: ព្រឹត្តិការណ៍ " ទាញយកប៊ូលពីរ មានពណ៌ដូចគ្នាគឺ ពណ៌ស រឺ ពណ៌ខ្មៅ "

ក. គណនា $P(A \cup B)$

ចំនួនករណីស្រប ដើម្បីទាញយកប៊ូលពីរដែលមានពណ៌ សគឺ:

$$n_1 = C_5^2 = \frac{5\times 4}{2\times 1} = 10$$

$$P(A) = \frac{n_1}{N} = \frac{10}{28}$$

ចំនួនករណីស្រប ដើម្បីទាញ ប៊ូលពីរដែលមានពណ៌ ខ្មៅគឺ :

$$n_2 = C_3^2 = C_3^1 = 3$$

$$P(B) = \frac{n_2}{N} = \frac{3}{28}$$

ដូច្នេះ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{28} + \frac{3}{28} = \frac{13}{28} \approx 0{,}46$

លំហាត់

10. ក្នុងឆ្នោតវត្ថុ 90សន្លឹក មានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់ 5សន្លឹក ។ រកប្រូបាប ដើម្បីអោយអ្នកទិញម្នាក់ដែលមានឆ្នោត 3សន្លឹកត្រូវរង្វាន់យ៉ាងតិចមួយសន្លឹក ។

ចំលើយ

យើងគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ "មានឆ្នោត 3សន្លឹកត្រូវរង្វាន់យ៉ាងតិចមួយសន្លឹក" ។

$\overline{A}$: ព្រឹត្តិការណ៍ "មានឆ្នោត 3សន្លឹកគ្មានត្រូវរង្វាន់សោះ" ។

ចំនួនករណីអាចគឺ : $n = C_{90}^{3} = \dfrac{90\times 89\times 88}{3\times 2\times 1} = 898.815$

ក្នុងឆ្នោត 90សន្លឹកមានឆ្នោត 85សន្លឹកមិនត្រូវរង្វាន់សោះ ។

ចំនួនករណីស្រប ដើម្បីអោយអ្នកទិញម្នាក់ ដែលមានឆ្នោត 3 សន្លឹក

គ្មានត្រូវរង្វាន់សោះគឺ : $p = C_{85}^{3} = \dfrac{85\times 84\times 83}{3\times 2\times 1} = 858.314$

ហើយ $P(\overline{A}) = \dfrac{p}{n} = \dfrac{858.314}{898.815} \approx 0.84$

ដូច្នេះ $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,84 = 0,16$

លំហាត់

11. នៅលើបន្ទះក្ដារ រាងការេប៉ុនគ្នា 6មានចុះលេខ (បន្ទះក្ដារមួយចុះមួយលេខ) ដូចខាងក្រោម :

បន្ទះក្ដារបីចុះលេខ 2 , បន្ទះក្ដារមួយចុះលេខ 5 និង បន្ទះក្ដារពីរទៀតចុះលេខ 4 ។ គេរៀបបន្ទះក្ដារទាំង 6 នេះជាជួរដេកដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយគេបានចំនួន 251.442 ។

ចំលើយ

ប្រូបាបដើម្បីអោយគេបានចំនួន 252.442

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ " រៀបបានចំនួន 252.442 " (គឺរៀបបានលេខ252.442)

តាមសម្មតិកម្ម : លេខទាំងអស់មាន 6 ដែលក្នុងនោះមាន :

លេខ 2 ចំនួនបី លេខ 4 ចំនួនពីរ លេខ 5 ចំនួនមួយ

ដូចនេះ ចំនួនដែលគេអាចបង្កើតបាន (មានលេខ 6ខ្ទង់) គឺជាចំលាស់មានលក្ខណៈដដែលៗ (មើលមេរៀនសង្ខេបក្នុងសៀវភៅភាគ 2 ទំព័រ 20)គឺ :

$$n = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$$

ក្នុងចំនោមចំនួនទាំង 60 នេះ មានចំនួន 252.442 តែមួយគត់

ដូចនេះ , ចំនួនករណីស្រប គឺ : $p = 1$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{p}{n} = \frac{1}{60} \approx 0,016$$

លំហាត់

12. ក្នុងប្រអប់មួយមានផលិតផលចំនួន 12 , ក្នុងនេះមាន 7ជាផលិតផលប្រភេទទី I និង 5ទៀតជាផលិតផលប្រភេទទី II ។ គេចាប់យកផលិតផល 4 ពីក្នុងប្រអប់នេះដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបា ដើម្បីអោយ :

ក. ផលិតផលទាំង 4 ជាផលិតផលប្រភេទទី I

ខ. ក្នុងផលិតផលទាំង 4 ដែលយកចេញ មាន 3 ជាផលិតផលប្រភេទទី I

ចំលើយ

ក. **ផលិតផលទាំង 4 ជាផលិតផលប្រភេទទី I**

ចំនួនករណីអាច : $n = C_{12}^{4} = \dfrac{12.11.10.9}{4.3.2.1} = 495$

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ " ចាប់យកបានផលិតផល 4 ស្ថិតក្នុងប្រភេទទី I "

ដើម្បីអោយបានផលិតផលប្រភេទទី I គេត្រូវចាប់យកក្នុងចំនោមផលិតផលប្រភេទទី I ទាំង 7 ដូចនេះ

ចំនួនករណីស្របគឺ : $p_1 = C_7^4 = C_7^3 = \dfrac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 35$

$$P(A) = \frac{p_1}{n} = \frac{35}{495} = \frac{7}{99} \approx 0,07$$

ខ. **យកបានផលិតផលប្រភេទទី I ចំនួន 3**

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ " យកបានផលិតផល 4ដែល 3 ជាផលិតផល**ប្រភេទទី I**"

យើងចែកករណីស្របជាពីរផ្នែកគឺ :

- ចាប់យកផលិតផលប្រភេទទី I ចំនួន3 ក្នុងចំណោម 7គឺ $C_7^3 = 35$ របៀប
- ចាប់យកផលិតផលប្រភេទទី II ចំនួន1 ក្នុងចំណោម5គឺ $C_5^1 = 5$ របៀប

ដូចនេះ ចំនួនករណីស្របគឺ : $p_2 = 35\times 5$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{p_2}{n} = \frac{35\times 5}{495} = \frac{35}{99} \approx 0,35$$

លំហាត់

13. គេមានកាត 9 ដែលចុះលេខពី 1 , 2 , ... ,9 ។ គេចាប់យកកាត 4 ដោយចៃដន្យ រួចរៀបវាជាជួរដេក ។ គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយគេបានចំនួនគូ ។

ចំលើយ

ប្រូបាប ដើម្បីអោយបានចំនួនគូ

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ " កាត់ទាំង 4 រៀបបានចំនួនគូ "

P(A) ជាប្រូបាប ដើម្បីអោយគេបានចំនួនគូ

ការចាប់យកកាត 4 មករៀបបង្កើតជាចំនួនមួយ គឺជាតំរៀប ដូចនេះ

ចំនួនករណីអាច : $n = A_9^4 = 9.8.7.6$

ករណីស្របចែកជាពីរផ្នែក :

- យកចំនួនគូមួយក្នុងចំនួនគូទាំង 4 ធ្វើជាលេខចុង (ខ្ទង់រាយ) មាន : $A_4^1 = 4$
- យក 3ចំនួនទៀតក្នុងចំនួនដែលនៅសល់ទាំង 8មកធ្វើ

ជាលេខខ្ទង់ដប់ , រយ និង ពាន់ មាន : $A_8^3 = 8.7.6$ របៀប

ដូច្នេះ ចំនួនករណីស្រប គឺ : $p = A_4^1 \times A_8^3 = 4.8.7.6$

$$P(A) = \frac{p}{n} = \frac{4.8.7.6}{9.8.7.6} = \frac{4}{9} \approx 0,444$$

លំហាត់

14. គេសរសេរលេខ 1 , 2 , 5 , 7 , 8 , រៀងគ្នានៅលើកាសប្រាំ ។ គេដាក់កាសទាំងប្រាំ ទៅក្នុងថង់មួយ ហើយគេលូកយកកាសបី មកតំរៀបគ្នាតាមលំដាប់ដែលយកចេញ ដើម្បីបង្កើតចំនួនមួយ ដែលមានលេខបីខ្ទង់នៅក្នុងប្រព័ន្ធទសភាគ ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីអោយ ចំនួនដែលគេបង្កើតបាននោះជា :

ក. ចំនួនគូ

ខ. ចំនួនតូចជាងរឺ ស្មើនឹង 278

គ. ចំនួនគូហើយ តូចជាងរឺស្មើនឹង 278

ចំលើយ

ក. ប្រូបាបបានចំនួនគូ

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ " បានចំនួនគូ "

ចំនួនករណីអាចទាំងអស់ ជាចំនួននៃតំរៀប 3 ធាតុយកក្នុងចំនោមធាតុទាំង 5
1 , 2 , 5 , 7 និង 8

$$n = A_5^3 = 5\times 4\times 3 = 60$$

ចំនួនគូដែលគេអាច បង្កើតបាននោះ អាចចែកចេញជាពីរក្រុម :

ចំនួនខាងចុងមានលេខ 2 និងចំនួនខាងចុងមានលេខ 8 ។

ដើម្បីបានចំនួនមួយដែលខាងចុងមានលេខ 2 យើងត្រូវបានពីរលេខទៀត ពីចំណោម លេខ 1,5,7 និង 8 មកតំរៀបពីមុខលេខ 2 ។

យើងបាន : $A_4^2 = 4\times 3 = 12$ របៀប សំរាប់តំរៀបចំនួនដែល ខាងចុងមានលេខ 2 ។

ដូចនេះយើងក៏បាន : $A_4^2 = 4\times 3 = 12$ របៀប ក្នុងការរៀបចំនួន ដែលខាងចុងមាន លេខ 8 ដែរ ។

ដូចនេះចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ បានចំនួនគូ គឺ : $n = 12 + 12 = 24$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{p}{n} = \frac{25}{60} = \frac{2}{5} \approx 0,40$$

ខ. **ប្រូបាបបានចំនួនតូចជាង រឺ ស្មើនឹង 278**

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ " បានចំនួនតូចជាងរឺ ស្មើនឹង 278 "

ចំនួនតូចជាង រឺ ស្មើនឹង 278 អាចចែកចេញជាពីរក្រុម : ចំនួនផ្ដើមដោយ 1 និង ចំនួនផ្ដើមដោយ 2 ។

ចំនួនផ្ដើមដោយ 1 មានចំនួន $A_4^2 = 12$ ព្រោះគេត្រូវជ្រើសរើស លេខពីរទៀត ក្នុងចំនោម លេខទាំងបួន ក្រៅពី 1 មកតំរៀបនៅក្រោយលេខ 1

ចំនួនដែលផ្ដើមដោយ 2 គឺ : 215 , 251 , 217 , 271 , 218 , 257, 275 , 258 , 278 មាន 9 ចំនួន ។

ជាសរុបវាមាន $12 + 9 = 21$ ចំនួនដែលតូចជាង រឺ ស្មើនឹង 278 ។

$$\Rightarrow P(B) = \frac{21}{60} = \frac{7}{20} = 0,35$$

គ. **ប្រូបាបបានចំនួនគូ ហើយតូចជាង រឺ ស្មើនឹង 278**

តាង C : ព្រឹត្តិការណ៍ " បានចំនួនគូ ហើយតូចជាង រឺ ស្មើនឹង 278 "

ចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌខាងលើនេះគឺ :

152 , 172 , 182 , 128 , 158 , 178 , 218 , 258 , និង 278

យើងបានចំនួនករណីស្របគឺ 9 :

$$\Rightarrow P(C) = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0,15$$

លំហាត់

15. ក្នុងចំនោមសន្លឹកឆ្នោត 100 សន្លឹកមាន ពីរសន្លឹកដែលត្រូវរង្វាន់

ក. បើគេទិញឆ្នោត 12 សន្លឹក តើគេមានប្រូបាបប៉ុន្មាននឹងត្រូវឆ្នោត យ៉ាងតិចមួយសន្លឹក ។

ខ. តើគេត្រូវទិញឆ្នោតប៉ុន្មានសន្លឹក ដើម្បីអោយបានប្រូបាប នឹង ត្រូវរង្វាន់ នោះធំជាង $\frac{4}{5}$ ។

ចំលើយ

ក. **ប្រូបាបអោយត្រូវឆ្នោត យ៉ាងតិចមួយសន្លឹក**

របៀបទី ១ :

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ " អោយត្រូវឆ្នោតយ៉ាងតិចមួយសន្លឹក "

មានពីរករណី :

- រឺមួយយើងត្រូវឆ្នោត 1 សន្លឹកក្នុងចំនោម 12 សន្លឹកដែលទិញ :

ចំនួនករណីអាច : ក្នុង 100សន្លឹក យើងចាប់យក 12សន្លឹក : C_{100}^{12}

ករណីស្រប :

- សន្លឹកឆ្នោត1សន្លឹកត្រូវ ក្នុងចំនោម សន្លឹកដែលត្រូវ ទាំង2សន្លឹក : C_2^1
- សន្លឹកឆ្នោត 11 សន្លឹកទៀតខុស : C_{98}^{11}

ដូចនេះ ចំនួនករណីស្របមានទាំងអស់គឺ : $C_2^1 \times C_{98}^{11}$

ទីបំផុត ប្រូបាបគឺ : $P_1 = \frac{C_2^1 \times C_{98}^{11}}{C_{100}^{12}} = \frac{2\times 88\times 12}{99\times 98} = \frac{325}{1617}$

- រឺមួយយើងត្រូវឆ្នោត ទាំង 2 សន្លឹក : ចំនួនករណីអាច : C_{100}^{12}

ករណីស្រប :
- ឆ្នោត 2 សន្លឹកត្រូវបានរង្វាន់ : $C_2^2 = 1$
- ឆ្នោត 10 សន្លឹកខុស : C_{98}^{10}

ដូចនេះចំនួនករណីស្របមាន : $C_2^2 \times C_{98}^{10} = C_{98}^{10}$

ប្រូបាបគេអោយត្រូវទាំងពីរសន្លឹកគឺ : $P_2 = \dfrac{C_{98}^{10}}{C_{100}^{12}} = \dfrac{12\times 11}{100\times 99} = \dfrac{11}{825}$

ដូច្នេះ ប្រូបាបនៃប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរគឺ :

$$P = P_1 + P_2 = \frac{325}{1617} + \frac{11}{825} \approx 0,22$$

របៀបទី ២ :

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ " ត្រូវឆ្នោតមួយសន្លឹក "

$\bar{B}$: ព្រឹត្តិការណ៍ " មិនត្រូវឆ្នោតសោះ "

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ $\bar{B}$ ។ ចំនួនករណីស្រប : C_{98}^{12}

$$\Rightarrow P(\bar{B}) = \frac{C_{98}^{12}}{C_{100}^{12}} = \frac{88\times 87}{100\times 99} = \frac{7656}{9900}$$

ដូច្នេះ $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \dfrac{7656}{9900} = \dfrac{2244}{9900} \approx 0,22$

ខ. ចំនួនសន្លឹកឆ្នោត ដែលត្រូវទិញ :

បើ n ជាចំនួនសន្លឹកឆ្នោត ដែលត្រូវទិញនោះ

- ដើម្បីត្រូវ 1 សន្លឹកយើងមានប្រូបាប :

$$P_1 = \frac{C_2^1 \times C_{98}^{n-1}}{C_{100}^{n}} = \frac{2\times \dfrac{98!}{(n-1)!(99-n)!}}{\dfrac{100!}{n!(100-n)!}} = \frac{2n}{9900}$$

- ដើម្បីត្រូវ ពីរសន្លឹកយើងមានប្រូបាប :

$$P_2 = \frac{C_2^2 \times C_{98}^{n-2}}{C_{100}^{n}} = \frac{\dfrac{98!}{(n-2)!(100-n)!}}{\dfrac{100!}{n!(100-n)!}} = \frac{n(n-1)}{9900}$$

ប្រូបាប ដែលអាចត្រូវឆ្នោតគឺ :

$$P = P_1 + P_2 = \frac{2n}{990} + \frac{n(n-1)}{990} = \frac{n^2 + 19n}{990}$$

យើងបាន $p > \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow \dfrac{n^2+19n}{990} > \dfrac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow 5n^2 + 95n - 4\times 990 > 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 19n - 792 > 0$$

សិក្សាសញ្ញានៃត្រីធា : $f(n) = n^2 + 19n - 792$

$\Delta = (19)^2 + 4\times 792 = 3429 \Rightarrow \sqrt{\Delta} \approx 58,5$

$n_1 = \dfrac{-19+58,5}{2} = 19,75 < 20$, $n_2 = \dfrac{-19-38,5}{2} = -38,75$

$f(n) > 0 \Leftrightarrow n \in]-\infty, n_2[\cup]n_1, +\infty[$

$\Leftrightarrow n > 19,75$ រឺ $n \geq 20$

ដូចនេះយើងត្រូវទិញឆ្នោតតាំងពី 20 សន្លឹកឡើងទៅលើ ។

លំហាត់

16. គេហូតបៀ 13សន្លឹកដោយចៃដន្យពីក្នុងហ៊ូបៀដែលមាន 52សន្លឹក ។

គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយគេហូតបាន :

ក. អាត់ 4 សន្លឹក

ខ. អាត់ 3 សន្លឹក និង កញ្ចាស់ 1 សន្លឹក

ចំលើយ

ចំនួនករណីអាច : $n = C_{52}^{13}$

ក. **ប្រូបាបដើម្បីហូតបានអាត់ 4 សន្លឹក**

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ " ហូតបៀ 13 សន្លឹកបានអាត់ 4សន្លឹក "

ករណីស្របចែកជា 2ផ្នែក

- ហូតយកអាត់ 4សន្លឹកមាន : $C_4^4 = 1$ របៀប

- 9សន្លឹកទៀត ហូតពីបៀដែលនៅសល់មាន 48សន្លឹក គេហូតបាន: C_{48}^{9} របៀប

ចំនួនករណីស្រប : $p = 1 . C_{48}^{9} = C_{48}^{9}$

ប្រូបាបដើម្បីអោយបានអាត់ 4សន្លឹក :

$$P(A) = \frac{p}{n} = \frac{C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}} = \frac{13\times12\times11\times10}{52\times51\times50\times49} = \frac{858}{324\times870} \approx 0.00264$$

ខ. ប្រូបាបដើម្បីអោយគេហូតបានអាត់ 3សន្លឹក និង កញ្ជាស់ 1សន្លឹក

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ " ហូតបានអាត់ សន្លឹក និង កញ្ជាស់1សន្លឹក "

ករណីស្របចែកជា 3 ផ្នែក :

- ហូតបានអាត់ 3សន្លឹកមាន : $C_{4}^{3} = 4$ របៀប
- ហូតយកកញ្ជាស់ 1សន្លឹកមាន : $C_{4}^{1} = 4$ របៀប
- ហូត 9សន្លឹកទៀតដែលមិនមែនអាត់ និង មិនមែនកញ្ជាស់មាន :

C_{44}^{9} របៀប

ចំនួនករណីស្រប : $p_1 = 4\times4\times C_{44}^{9}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{p_1}{n} = \frac{4\times4\times C_{44}^{9}}{C_{52}^{13}}$$

$$= \frac{16\times13\times12\times11\times10\times39\times38\times37\times36}{52\times51\times50\times49\times48\times47\times46\times45}$$

$$= \frac{11\times39\times19\times37\times36}{51\times5\times\times49\times47\times23\times45} \approx 0.01786$$

លំហាត់

17. ក្នុងហ៊ូបៀដែលមាន 52សន្លឹក មាន 4 សន្លឹកជាអាត់ ។ គេហូតបៀ 3សន្លឹក ដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយគេហូតបាន :

ក. អាត់ 1 រឺ 2 សន្លឹក

ខ. តិចបំផុត អាត់ 1សន្លឹក

ចំលើយ

ក. ប្រូបាបដើម្បីអោយបានអាត់ 1 រឺ 2 សន្លឹក

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ " ហូតបៀ 3សន្លឹកបានអាត់ 1 រឺ 2 សន្លឹក "

A_1 : ព្រឹត្តិការណ៍ " ហូតបៀ 3សន្លឹកបានអាត់ 1សន្លឹក "

A_2 : ព្រឹត្តិការណ៍ " ហូតបៀ 3សន្លឹកបានអាត់ 2សន្លឹក "

$\Rightarrow A = A_1 \cup A_2$, ដោយ A_1និងA_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នា

$\Rightarrow P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$$= \frac{C_4^1 . C_{48}^2}{C_{52}^3} + \frac{C_4^2 . C_{48}^1}{C_{52}^3} = \frac{4\times48\times47 + 48\times3\times4}{52\times50\times17}$$

$$= \frac{48}{221} \approx 0.2172$$

ខ. ប្រូបាបដើម្បីអោយបានអាត់ 1 សន្លឹកយ៉ាងតិច

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ " ហូតបានអាត់តិចបំផុត 1សន្លឹក "

$\bar{B}$: ព្រឹត្តិការណ៍ " ហូតបៀ 3សន្លឹកសុទ្ធតែមិនមែនអាត់ "

(រឺ ហូតមិនបានអាត់) $\Rightarrow P(\bar{B}) = \frac{C_{48}^3}{C_{52}^3}$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_{48}^3}{C_{52}^3} = 1 - \frac{48\times47\times46}{52\times51\times50} = 0.2174$$

លំហាត់

18. ថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស 80នាក់ ។ ក្នុងនោះមាន 30នាក់ពូកែគណិត 40នាក់ពូកែជីវវិទ្យា និង 20 នាក់ពូកែគណិតផង និង ជីវវិទ្យាផង ។ គេកំណត់ថា រាល់សិស្សណាដែលពូកែយ៉ាងតិចមួយមុខវិជ្ជានឹងបានទទួលរង្វាន់ ។ គេហៅឈ្មោះសិស្សក្នុងថ្នាក់នេះម្នាក់ដោយចៃដន្យ ។

គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយសិស្សនេះបានទទួលរង្វាន់ ។

ចំលើយ

ប្រូបាបដើម្បីអោយគេហៅចំឈ្មោះសិស្សដែលបានទទួលរង្វាន់

តាង A : ព្រឹត្តិការណ៍ " ហៅចំឈ្មោះដែលទទួលរង្វាន់ "

A_1 : ព្រឹត្តិការណ៍ " ហៅចំឈ្មោះសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា "

A_2 : ព្រឹត្តិការណ៍ " ហៅចំឈ្មោះសិស្សពូកែជីវវិទ្យា "

គេបាន $A = A_1 \cup A_2$

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{30}{80} + \frac{40}{80} - \frac{20}{80} = \frac{50}{80} = \frac{5}{8} = 0.625$$

លំហាត់

19. ក្នុងធុងមួយមានប៊ូល 90 ដែលចុះលេខពី 1 ដល់ 90 គេលូកយកប៊ូលមួយ ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីអោយប៊ូលនោះមានចុះលេខគូ រឺ ពហុគុណនៃ 5 ។

ចំលើយ

ក្នុងប៊ូល 90នេះមាន 45ចុះលេខគូ និង ប៊ូល 45 ចុះលេខសេស ។ ហើយក្នុង ប៊ូល 90 នេះមានប៊ូល 18 ចុះលេខជាពហុគុណនៃ 5 ។

A : ព្រឹត្តិការណ៍ " លូកយកប៊ូលដែលចុះលេខគូ "

B : ព្រឹត្តិការណ៍ " លូកយកប៊ូលដែលចុះលេខពហុគុណនៃ 5 "

$A \cup B$: ព្រឹត្តិការណ៍ " លូកយកប៊ូលដែលចុះលេខគូ រឺជាពហុគុណនៃ 5 "

$A \cap B$: ព្រឹត្តិការណ៍ "លូកយកប៊ូលដែលចុះលេខគូហើយជាពហុគុណនៃ 5"

ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ចុះសំរុងគ្នា ដូច្នេះ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ប៉ុន្តែ $P(A) = \frac{C^1_{45}}{C^1_{90}} = \frac{45}{90}$ ហើយ $P(B) = \frac{C^1_{18}}{C^1_{90}} = \frac{18}{90}$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{45}{90} \times \frac{18}{90} = \frac{9}{90}$$

ដូច្នេះ $P(A \cup B) = \frac{45}{90} + \frac{18}{90} - \frac{9}{90} = \frac{54}{90} = 0.60$

លំហាត់

20. ឈាមមនុស្សចែកជា 4ក្រុម : ក្រុមឈាមប្រភេទ O , ឈាម A , ឈាម B , ឈាម AB ។ មានមនុស្ស 18នាក់ មកបង្ហាញខ្លួន ដើម្បីផ្តល់ឈាមគឺ :

- មានមនុស្ស 11នាក់ មានឈាមក្រុម O
- មានមនុស្ស 4នាក់ មានឈាមក្រុម A
- មានមនុស្ស 2នាក់ មានឈាមក្រុម B
- មានមនុស្ស 1នាក់ មានឈាមក្រុម AB

គេយកឈាមមកពិនិត្យ មើលដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ខាងក្រោម :

ក. មនុស្ស 3នាក់ មានប្រភេទឈាមតែមួយ

ខ. មនុស្ស 3នាក់យកឈាមមកពិនិត្យមើលមានឈាមមនុស្ស ម្នាក់យ៉ាងតិច ឈាមក្រុម A

គ. មនុស្ស 3 នាក់មានឈាមយ៉ាងតិច 2 នាក់មានក្រុមឈាមតែមួយ

ឃ. ឈាមមនុស្ស 3នាក់ មានក្រុមខុសគ្នា ។

ចំលើយ

ក. ឈាមមនុស្ស 3 នាក់ ដែលមានក្រុមដូចគ្នា ត្រូវបានយកមកពិនិត្យ ក្នុងចំនោម មនុស្ស 11 នាក់នៃប្រភេទក្រុម O រឺ 4 នាក់ក្នុងប្រភេទក្រុម A

គឺ : E ព្រឹត្តិការណ៍ " ឈាមមនុស្ស 3 នាក់មានប្រភេទឈាមដូចគ្នា "

តាង E_1 : " ឈាមប្រភេទក្រុម O "

E_2 : " ឈាមប្រភេទក្រុម A " , ដែល $E = E_1 \cup E_2$

គេបាន : $P(E_1)=\frac{C_{11}^3}{C_{18}^3}=\frac{165}{816}$, $P(E_2)=\frac{C_4^3}{C_{18}^3}=\frac{4}{816}$

- ដោយ E_1 , E_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុង

$$\Rightarrow P(E)=P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)$$

$$\frac{165}{816}+\frac{4}{816}=\frac{169}{816}\approx 0.207$$

ខ. តាង F ព្រឹត្តិការណ៍ " មានមនុស្សម្នាក់យ៉ាងតិច មានឈាមក្រុម A ក្នុងចំនោមមនុស្ស 3 នាក់ "

$\bar{F}$ " គ្មានមនុស្សម្នាក់សោះដែលមានឈាមក្រុម A ក្នុងចំនោមមនុស្ស 3នាក់ "

ក្នុងចំនោមមនុស្ស 18 នាក់មាន 14 នាក់ដែលមានឈាមមិនមែនក្រុម A

គេបាន : $P(\bar{F})=\frac{C_{14}^3}{C_{18}^3}=\frac{364}{816}$

$$\Rightarrow P(F)=1-P(\bar{F})=1-\frac{364}{816}=\frac{452}{816}=\frac{113}{204}\approx 0,554$$

គ. តាង G ព្រឹត្តិការណ៍ " មនុស្ស 3នាក់មាន 2 នាក់យ៉ាងតិចឈាមក្រុមតែមួយ "

- មនុស្ស 3 នាក់មាន 2 នាក់យ៉ាងតិចឈាមក្រុមតែមួយ បានន័យថា:

មនុស្ស 2 នាក់ឈាមក្រុម O រឺ មនុស្ស 2 នាក់ឈាមក្រុម A រឺ មានមនុស្ស 2 នាក់ឈាមក្រុម B ។

បើគេតាង G_1, G_2, G_3 ជាព្រឹត្តិការណ៍ខាងលើ គេបាន :

$G=G_1\cup G_2\cup G_3$

ចំនួនករណីអាច C_{18}^3

- G_1 ព្រឹត្តិការណ៍ " មនុស្ស 3 នាក់មាន 2 នាក់ឈាមក្រុម O "

- ក្នុងចំនោមមនុស្ស 18 នាក់មានឈាមក្រុម O ចំនួន 11 នាក់ រីឯ មិនមែនក្រុម O ចំនួន 7 នាក់ ។ គេបាន :

មនុស្ស 2 នាក់មានឈាមក្រុម O យកក្នុងចំនោមមនុស្ស 11 នាក់ក្រុម O គឺ : C_{11}^2

នៅសល់ 1 នាក់មិនមែនក្រុម O យកក្នុងចំនោម 7 នាក់ដែលមិនមែនក្រុម O គឺ : C_7^1

ចំនួនករណីស្របគឺ : $C_{11}^2\times C_7^1$

$$\Rightarrow P(G_1)=\frac{C_{11}^2\times C_7^1}{C_{18}^3}=\frac{385}{816}$$

- G_2 : ព្រឹត្តិការណ៍ " មនុស្ស 3 នាក់មាន 2 នាក់ ឈាមក្រុម A "

ចំនួនករណីស្រប $C_4^2\times C_{14}^1$

$$\Rightarrow P(G_2)=\frac{C_4^2\times C_{14}^1}{C_{18}^3}=\frac{84}{816}$$

- G_3 : ព្រឹត្តិការណ៍ " មនុស្ស 3 នាក់មាន 2 នាក់ឈាមក្រុម B "

ចំនួនករណីស្រប $C_2^2\times C_{16}^1$

$$\Rightarrow P(G_3)=\frac{C_2^2\times C_{16}^1}{C_{18}^3}=\frac{16}{816}$$

ដោយ G_1, G_2, G_3 ជាព្រឹត្តិការណ៍ មិនចុះសំរុង

$$\Rightarrow P(G)=P(G_1\cup G_2\cup G_3)=P(G_1)+P(G_2)+P(G_3)$$

$$=\frac{385}{816}+\frac{84}{816}+\frac{16}{816}=\frac{485}{816}\approx 0,594$$

ឃ. តាង E ព្រឹត្តិការណ៍ " មានមនុស្ស 3 នាក់មានក្រុមឈាម 3 ខុសៗគ្នា "

គេបាន $P(E)=1-P(G)=1-0,594=0,406$

លំហាត់

21. នៅក្នុងទូរបស់ហាងលក់គ្រឿងអលង្ការមួយ មានតាំងខ្សែ ក 7 ខ្សែ , ចិញ្ចៀន 3 វង់ , ខ្សែដៃ 3 ខ្សែ និង នាឡិកាដៃ 7 គ្រឿង ។ នៅយប់មួយចោរម្នាក់បាន វាយបំបែកទូនេះ តែវាមានការភ្ញាក់ផ្អើលដោយមានអ្នកដំណើរ ម្នាក់ឆ្លងកាត់ វារត់គេចខ្លួន ដោយយកទៅជាមួយនូវគ្រឿងអលង្ការចំនួន 4(យកដោយចៃដន្យ) ។

1). កំនត់ប្រូបាប នៃ ព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

ក. " ចោរបានយកគ្រឿងអលង្ការគ្រប់ប្រភេទ "

ខ. " ចោរបានយកអលង្ការ 4 ដែលមានប្រភេទដូចគ្នា "

គ. " ចោរយកបានយ៉ាងហោចណាស់ នូវ ខ្សែកមួយខ្សែ "

2). ក្នុងចំនោមចិញ្ចៀនទាំង 3 វង់ មានចិញ្ចៀនមួយដែលមានតំលៃខ្ពស់បំផុត ។ ហើយនៅក្នុងចិញ្ចៀននេះ មានប្រដាប់អេឡិចត្រូនិចសំរាប់ផ្តល់ពត៌មានដល់ប៉ូលីស នៅពេលណា ដែលចោរលួចយកចិញ្ចៀននេះ ។ រកប្រូបាប នៃព្រឹត្តិការណ៍ E : " ប៉ូលីសចាប់បានចោរនេះ "

ចំលើយ

1). រកប្រូបាប នៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

ក. ព្រឹត្តិការណ៍ A " ចោរយកបានគ្រឿងអលង្ការ គ្រប់ប្រភេទ "

អលង្ការមាន 4 ប្រភេទ ។

- បើចោរយកបានគ្រប់ប្រភេទ ចំនួនករណីអាច C_{20}^4
- ចំនួនករណីស្រប : $C_7^1 \times C_3^1 \times C_3^1 \times C_7^1$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{C_7^1 \times C_3^1 \times C_3^1 \times C_7^1}{C_{20}^4} = \frac{441}{4845} \approx 0,091$$

ខ. **ព្រឹត្តិការណ៍ B " ចោរយកបានអលង្ការ 4 ដែលមានប្រភេទដូចគ្នា "**

- បើចោរអាចយកបាន អលង្ការ 4 មានប្រភេទដូចគ្នា បានន័យថា ចោរយកបានតែខ្សែក និងនាឡិកា (ព្រោះទាំងពីរមុខមាន ចំនួនលើសពីចំនួនអលង្ការដែលចោរយក) ។

គេបាន : $$P(B) = \frac{C_7^4}{C_{20}^4} + \frac{C_7^4}{C_{20}^4} = 2\frac{C_7^4}{C_{20}^4} \approx 0.00002$$

គ. **ព្រឹត្តិការណ៍ C " ចោរយកបានយ៉ាងតិចណាស់ នូវខ្សែកមួយ "**

គេបាន $\overline{C}$ ព្រឹត្តិការណ៍ " ចោរមិនយកខ្សែក ទាល់តែសោះ "

ចោរយកគ្រឿងអលង្ការ 4 ដែលមិនមែនខ្សែកគឺ : C_{13}^4

$$\Rightarrow P(\overline{C}) = \frac{C_{13}^4}{C_{20}^4} \approx 0.1476$$

ដូច្នេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ :

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{C_{13}^4}{C_{20}^4} = 1 - 0.1476 = 0.8524$$

2. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ **D " ប៉ូលីសចាប់បានចោរនេះ "**

បើប៉ូលីសចាប់បានចោរនេះ ចោរលួចបានគ្រឿងអលង្ការ 4 ដែលមានចិញ្ចៀន 3 វង់ ហើយក្នុងចំនោមចិញ្ចៀន 3 វង់ មានចិញ្ចៀន 1 វង់ដែលមានតំលៃខ្ពស់ ។ បានន័យថា :

- ចោរយកបានចិញ្ចៀនមួយវង់ ដែលមានតំលៃខ្ពស់ក្នុងចំនោមចិញ្ចៀន 3 វង់គឺ : C_3^1
- នៅសល់អលង្ការ 3 វង់ទៀត (ព្រោះចោរយកអលង្ការ 4) ចោរយកក្នុងចំណោមអលង្ការ 7 ដែលមិនមែនជាចិញ្ចៀន គឺ : C_{17}^3

ចំនួនករណីស្រប គឺ : $C_3^1 \times C_{17}^3$ ហើយចំនួនករណីអាច គឺ : C_{20}^4

ដូច្នេះ $$P(D) = \frac{C_3^1 \times C_{17}^3}{C_{20}^4} \approx 0,6$$

លំហាត់

22. ប្រូបាបដើម្បីអោយម៉ាស៊ីនមួយ ដំនើរការរអាក់រអួលមួយថ្ងៃស្មើ នឹង 0,03 គណនាប្រូបាបដើម្បីអោយម៉ាស៊ីននេះ ដំនើរការ 4 ថ្ងៃជាប់គ្នាដោយគ្មានរអាក់រអួល ។

ចំលើយ

ប្រូបាបដើម្បីអោយម៉ាស៊ីនដំនើរការ 4 ថ្ងៃជាប់គ្នា ដោយមិនរអាក់រអួល

តាងA : ព្រឹត្តិការណ៍ " ម៉ាស៊ីនមិនរអាក់រអួលក្នុងរយៈពេល 4 ថ្ងៃជាប់គ្នា "

A_i : ព្រឹត្តិការណ៍ " ម៉ាស៊ីនរអាក់រអួលនៅថ្ងៃទី i " ដែល $i \in \{1.2.3.4\}$

$\overline{A_i}$: ព្រឹត្តិការណ៍ " ម៉ាស៊ីនមិន រអាក់រអួលនៅថ្ងៃទី i ទេ "

$\Rightarrow A = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$ ដែល $\overline{A_i}$ មិនទាក់ទងគ្នា

តាមសម្មតិកម្ម : $P(A_i) = 0.03 \Rightarrow P(\overline{A_i}) = 1 - 0,03 = 0,97$

$$P(A) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4})$$
$$= P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3}) \times P(\overline{A_4}) = (0,97)^4 = 0,8853$$

លំហាត់

23. តើគេត្រូវបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់យ៉ាងតិចប៉ុន្មានគ្រាប់ ដើម្បីអោយប្រូបាបយ៉ាងតិចមានគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចេញលេខ 6 ធំជាង រឺស្មើ 0.9 ?

ចំលើយ

រកចំនួនគ្រាប់ឡុកឡាក់ដែលត្រូវបោះ

តាង n ចំនួនគ្រាប់ឡុកឡាក់ដែលត្រូវបោះ $(n \in N^*)$

A : ព្រឹត្តិការណ៍ " មានយ៉ាងតិចគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចេញលេខ 6 "

A_i : ព្រឹត្តិការណ៍ "គ្រាប់ឡុកឡាក់ទី i ចេញលេខ 6 " $i \in \{1.2,\ldots,n\}$

$\overline{A}$ និង $\overline{A_i}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយរបស់ A និង A_i

គ្រាប់ឡុកឡាក់ទី 1 , ទី 2 , ..., ទិ n ចេញលេខ 6 មានប្រូបាបដូចគ្នាគឺ :

$$P(A_i) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

តែ $\overline{A}$: ព្រឹត្តិការណ៍ " គ្មានគ្រាប់ឡុកឡាក់ណាមួយក្នុងចំនោម n គ្រាប់ដែលបោះ ចេញលេខ 6 "

ដូច្នេះ

$$\overline{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n})$$ ($\overline{A_i}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា)

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times \cdots \times P(\overline{A_n}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

គេបាន $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

តែ $P(A) \geq 0,9 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,1$

$$\Leftrightarrow n \log\frac{5}{6} \leq \log 0,1 = -1$$
$$\Leftrightarrow n(\log 5 - \log 6) \leq -1$$
$$\Rightarrow n \geq \frac{-1}{0,699 - 0,778} = 12,65$$

ដូច្នេះដើម្បីអោយប្រូបាប យ៉ាងតិចមានគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចេញលេខ 6 ធំជាង រឺ ស្មើនឹង 0.9 គេត្រូវបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់យ៉ាងតិច $n = 13$ គ្រាប់

លំហាត់

24. គេអោយព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ដែល $P(A) = 0.6$ និង $P(B) = 0.4$

គណនា $P(A \cup B)$ ក្នុងករណីទាំងបីខាងក្រោម :

ក. A និង B មិនចុះសំរុងគ្នា

ខ. ការសំរេចនៃព្រឹត្តិការណ៍ B នាំអោយមានព្រឹត្តិការណ៍ A

គ. A និង B មិនទាក់ទងគ្នា ។

ចំលើយ

ក. **គណនា $P(A \cup B)$ ដែល A និង B មិនចុះសំរុងគ្នា**

គេមាន : A, B មិនចុះសំរុងគ្នា $\Rightarrow A \cap B = \phi$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.6 + 0.4 = 1$$

ខ. **គណនា $P(A \cup B)$ ដែលការសំរេចនៃព្រឹត្តិការណ៍នាំអោយមានព្រឹត្តិការណ៍A:**

ការសំរេចនៃ B នាំអោយមាន

$A \Rightarrow B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$

$P(A \cup B) = P(A) = 0.6$

គ. **គណនា $P(A \cup B)$ ដែល A និង B មិនទាក់ទងគ្នា**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$$
$$= 0.6 + 0.4 - 0.24 = 0.76$$

លំហាត់

25. A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរដែល

$P(A \cup B) = 0.8$ និង $P(A \cap B) = 0.15$

ក. តើ $P(A)$ អាចប្រែប្រួលពីណាទៅណា ?

ខ. គណនា $P(A)$ និង $P(B)$ ក្នុងករណីដែលព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរមិនទាក់ទងគ្នា ។

ចំលើយ

ក. **ការប្រែប្រួលនៃ P(A) :**

$A \subset A \cup B \Rightarrow P(A) \le P(A \cup B) = 0.8 \Rightarrow P(A) \le 0.8 \quad (1)$

$A \cap B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \le P(A) \quad \Rightarrow 0.15 \le P(A) \quad (2)$

(1) និង (2) $\Rightarrow 0.15 \le P(A) \le 0.8$

ខ. **គណនា P(A) និង P(B) , A និង B មិនទាក់ទងគ្នា**

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.15$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow P(A) + P(B) = 0.8 + 0.15 = 0.95$

$\Rightarrow P(A)$ និង $P(B)$ ជាឫសនៃសមីការ : $X^2 - 0.95X + 0.15 = 0$

$\Delta = (0.95)^2 - 0.6 = 0.3025 = (0.55)^2$

$X = \dfrac{0.95 \pm 0.55}{2}$ គេបាន $X' = 0.75$, $X'' = 0.20$

ដូចេះ $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.20$ រឺ $P(A) = 0.20$, $P(B) = 0.75$

លំហាត់

26. សមាគមមួយមានសមាជិក 18នាក់ ក្នុងនេះមានស្ត្រី 10នាក់ និង បុរស 8នាក់ ។ សមាគមត្រូវការបង្កើតគណៈកម្មាធិការកណ្តាល សមាជិក 4 រូបដោយចាប់ឆ្នោតដោយចៃដន្យ ។

ក. តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មាធិការបែបនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ខ. ប្រាប់ប្រូបាប P ដើម្បីអោយគណៈកម្មាធិការបង្កើតមានស្ត្រី 2 រូប និង បុរស 2 រូប ។

ចំលើយ

ក. **ចំនួនរបៀបដើម្បីបង្កើតគណៈកម្មាធិការ :**

គឺចំនួនរបៀប ដើម្បីជ្រើសរើសមនុស្ស 4នាក់ ក្នុងចំនោម 18នាក់ :

$$C_{18}^{4} = \frac{18!}{4!(18-4)!} = \frac{18\times17\times16\times15}{4\times3\times2} = \frac{73440}{24} = 3060 \text{ របៀប}$$

ខ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A " គណៈកម្មាធិការបង្កើតបាន មានស្ត្រី 2 រូប និង បុរស 2 រូប "

- បុរស 2 រូប ត្រូវជ្រើសរើសក្នុងចំនោមបុរស 8 រូប គឺ : C_8^2
- នៅសល់ 2 រូប ជាស្ត្រី (ព្រោះគណៈកម្មាធិការមាន 4 រូប) ត្រូវជ្រើសរើសក្នុងចំនោមស្ត្រី 10 រូប គឺ : C_{10}^2

ដូច្នេះ $P(A) = \frac{C_8^2\times C_{10}^2}{C_{10}^4} = \frac{1260}{3060} \approx 0.41$

លំហាត់

27. ក្នុងថង់មួយ មានគ្រាប់ឃ្លី ពណ៌ក្រហម15 គ្រាប់ និង ពណ៌ខ្មៅ 5 គ្រាប់ ។ លោក ទី បានលូកយកឃ្លីពីក្នុងថង់បន្តបន្ទាប់ ចំនួនបីដង ដែលម្តងៗ យកឃ្លី ចំនួន បីដោយមិនដាក់ទៅវិញ ។ គណនាប្រូបាប នៃព្រឹត្តិការណ៍ :

ក. A : " លោក ទី លូកយកពីថង់បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅមួយ "

ខ. B : " លោក ទី លូកយកពីថង់បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅពីរ "

គ. C : " លោក ទី លូកយកពីថង់បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅបី "

ចំលើយ

គេលូកយកឃ្លី 3 គ្រាប់ ចំនួន 3 ដងបន្តបន្ទាប់គ្នា ។ មានន័យថា គេលូកយកឃ្លីបានចំនួន 9 ដូច្នេះ ចំនួនករណីអាចគឺ C_{20}^9

ក. **គេលូកយកឃ្លីពីថង់បានពណ៌ខ្មៅមួយ**

មានន័យថា : គេបានឃ្លីពណ៌ខ្មៅ 1 ក្នុងចំនោមឃ្លីពណ៌ខ្មៅ 5 គឺ C_5^1

នៅសល់ឃ្លី 8 គ្រាប់ទៀត ដែលមិនមែនពណ៌ខ្មៅ ត្រូវជ្រើសរើសក្នុងចំនោម 15 គ្រាប់មិនមែនខ្មៅ គឺ C_{15}^8

ដូច្នេះ $P(A) = \frac{C_5^1\times C_{15}^8}{C_{20}^9}$

តាមរបៀបដូចគ្នាគេបាន

ខ. គេលូកយកឃ្លីពីថង់បានពណ៌ខ្មៅពីរ :

$$P(B) = \frac{C_5^2\times C_{15}^7}{C_{20}^9}$$

គ . គេយកឃ្លីពីថង់ បានពណ៌ខ្មៅបី :

$$P(C) = \frac{C_5^3\times C_{15}^6}{C_{20}^9}$$

លំហាត់

28. គេទំលាក់មេអាប៉ោងបី A , B , C ។ a , b , c ជាមុខមេអាប៉ោងទាំងបី ដែលចេញរៀងគ្នា ។ គេបង្កើតជាសមីការមួយ : $ax^2+bx+c=0$ គណនាប្រូបាប នៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

ក. -1 ជាឫសនៃសមីការនេះ

ខ. ឫសទាំងពីរនៃសមីការជាចំនួនគត់

គ. ឫសទាំងពីរនៃសមីការជាចំនួនសនិទាន

ឃ. ឫសទាំងពីរនៃសមីការជាចំនួនពិត

ចំលើយ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ " -1 ជាឫសនៃសមីការ "

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ " ឫសទាំងពីរនៃសមីការជាចំនួនគត់ "

C ជាព្រឹត្តិការណ៍ " ឫសទាំងពីរនៃសមីការជាចំនួនសនិទាន "

D ជាព្រឹត្តិការណ៍ " ឫសទាំងពីរនៃសមីការជាចំនួនពិត "

ក. គណនា **P(A)** :

បើ -1 ជាឫសនៃ ax^2+bx+c នោះគេបាន $a-b+c=0$

ករណីស្របទាំងឡាយដែលគេមានគឺ :

(1,2,1) , (1,3,2) , (1,4,3) , (1,5,4) , (1,6,5) , (2,3,1) , (2,4,2)
(2,5,3) , (2,6,4) , (3,4,1) , (3,5,2) , (3,6,3) , (4,5,1) , (4,6,2)
(5,6,1) ។

យើងមានករណីស្របទាំងអស់ចំនួន 15

ចំនួនករណីអាចគឺ : $C_6^1\times C_6^1\times C_6^1=6\times6\times6=216$

$$P(A)=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}\approx 0{,}069$$

ខ. **គណនា P(B) :**

បើសមីការមានឫសទាំងពីរជាចំនួនពិតនោះវាត្រូវមាន

$\Delta\ge 0$ គឺ $b^2\ge 4ab$

ករណីស្របទាំងឡាយមាន :

(1,2,1) , (1,3,1) , (1,3,2) , (1,3,3) , (1,4,1) , (1,4,2) , (1,4,3)
(1,4,4) , (1,5,1) , (1,5,2) , (1,5,3) , (1,5,4) , (1,5,5) , (1,5,6)
(1,6,1) , (1,6,2) , (1,6,3) , (1,6,4) , (1,6,5) , (1,6,6) , (2,3,1)
(2,4,1) , (2,4,2) , (2,5,1) , (2,5,2) , (2,5,3) , (2,6,1) , (2,6,2)
(2,6,3) , (2,6,4) , (3,4,1) , (3,5,1) , (3,5,2) , (3,6,1) , (3,6,2)
(3,6,3) , (4,4,1) , (4,5,1) , (4,6,1) , (4,6,2) , (5,5,1) , (5,6,1)
(6,6,1)

យើងមានករណីស្របទាំងអស់ 43 ចំនួនករណីអាច : 216

$$P(B)=\frac{43}{216}\approx 0{,}199$$

គ. **គណនា P(C) :**

សមីការមានឫសទាំងពីរជាចំនួនសនិទានកាលណា $\Delta\ge 0$ និង Δ ជាការេ
គត់ គឺ $b^2-4ac\ge 0$ និង b^2-4ac ជាការេគត់

យើងមានករណីស្រប :

(1,2,1) , (1,3,2) , (1,3,1) , (1,4,3) , (1,4,4) , (1,5,4) , (1,5,6)
(1,6,5) , (2,3,1) , (2,4,2) , (2,5,2) , (2,5,3) , (2,6,4) , (3,4,1)
(3,5,2) , (3,6,3) , (4,5,1) , (4,6,2) , (4,4,1) , (5,6,1)

ចំនួនករណីស្របគឺ 20 ។

$$\Rightarrow P(C)=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}\approx 0{,}092$$

ឃ. **គណនា P(D) :**

ករណីស្របនៃ D ជាករណីស្របនៃ C ហើយត្រូវអោយឫសនៃសមីការជា
ចំនួនគត់ទៀត គឺ :

$$\begin{cases} x'.x''=k \quad (k:\text{ជាចំនួនគត់}) \\ x'+x''=k' \quad (k':\text{ជាចំនួនគត់}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{a}=k \\ -\dfrac{b}{a}=k \end{cases}$$

យើងត្រូវយក c ជាពហុគុណនៃ a និង b ជាពហុគុណនៃ a

យើងមានករណីស្រប :

(1,2,1) , (1,3,2) , (1,4,3) , (1,4,4) , (1,5,4) , (1,5,6) , (1,6,5)
(2,4,2) , (2,6,4) , (3,6,3)

ចំនួនករណីស្របគឺ 10 ដូច្នេះ $P(D)=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}\approx 0{,}046$

លំហាត់

29. គេចែកទឹកដោះគោ 15 កំប៉ុងដោយចៃដន្យ(ក្នុងនោះមាន 5 កំប៉ុងខូច គុណភាព)
ជា 5 ចំណែក ក្នុងមួយចំណែកៗមាន 3 កំប៉ុង ។

គណនាប្រូបាបដើម្បីអោយផ្នែកនីមួយៗ មានទឹកដោះគោអន់គុណភាពមួយកំប៉ុង

ចំលើយ

ប្រូបាបដើម្បីអោយផ្នែកនីមួយៗមានទឹកដោះគោអន់គុណភាពមួយកំប៉ុង

តាង A: ព្រឹត្តិការណ៍ " ផ្នែកនីមួយៗមានទឹកដោះគោអន់គុណភាពមួយកំប៉ុង"

A_i : ព្រឹត្តិការណ៍ " ផ្នែកទី i មានទឹកដោះគោអន់គុណភាពមួយកំប៉ុង "

$i \in \{1,2,3,4,5\}$

- ផ្នែកទី 1 បានទឹកដោះគោអន់គុណភាព មួយកំប៉ុង

ចំនួនករណីអាច C_{15}^3

<u>ករណីស្រប</u> : ទឹកដោះគោអន់គុណភាព មួយកំប៉ុងយកកងចំនោម ទឹកដោះគោអន់គុណភាព 5 កំប៉ុងគឺ : C_5^1 ។ នៅសល់ 2 កំប៉ុងគុណភាពល្អ យកក្នុងចំនោមគុណភាពល្អ 10 កំប៉ុង C_{10}^2 ។ គេបាន ចំនួនករណីស្រប : $C_5^1 \times C_{10}^2$

$$\Rightarrow P(A_1) = \frac{C_5^1 \times C_{10}^2}{C_{10}^3} = \frac{10 \times 9}{14 \times 13} = \frac{45}{91}$$

- ផ្នែកទី 1 បានយករួចហើយនៅផ្នែកទី 2 :

ចំនួនករណីអាច C_{12}^3

ផ្នែកទី 2 យកទឹកដោះគោអន់គុណភាព 1 កំប៉ុងក្នុងចំនោមអន់គុណភាព 4 កំប៉ុង គឺ C_4^1 ។ នៅសល់ 2 កំប៉ុងគុណភាពល្អយកក្នុងចំនោម 8 កំប៉ុងគុណភាពល្អគឺ C_8^2

ចំនួនករណីស្រប : $C_4^1 \times C_8^2$

$$\Rightarrow P(A_2 / A_1) = \frac{C_4^1 \times C_8^2}{C_{12}^3} = \frac{8 \times 7}{11 \times 10} = \frac{28}{55}$$

- តាមរបៀបដូចគ្នានេះ គេបាន ផ្នែកទី 3 ផ្នែកទី 4 ផ្នែកទី 5 គឺ :

$$P(A_3 / A_1A_2) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{C_9^3} = \frac{6 \times 5}{8 \times 7} = \frac{15}{28}$$

$$P(A_4 / A_1A_2A_3) = \frac{C_2^1 \times C_4^2}{C_6^3} = \frac{4 \times 3}{5 \times 4} = \frac{3}{5}$$

$$P(A_5 / A_1A_2A_3A_4) = \frac{C_1^1 \times C_2^2}{C_3^3} = 1$$

តែ $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ ដែល A_i ជាព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1A_2) \times P(A_4 / A_1A_2A_3) \times P(A_5 / A_1A_2A_3A_4)$$

$$= \frac{45}{91} \times \frac{28}{55} \times \frac{15}{28} \times \frac{3}{5} \times 1 = \frac{81}{1001} = 0,0809$$

លំហាត់

30. គេមានប្រអប់ 3 ដូចគ្នា ។ ប្រអប់ទី I មាន ផលិតផល 10ដែលក្នុងនេះមានផលិតផលល្អ 8 , ប្រអប់ទី II មានផលិតផល 15 ដែលក្នុងនេះមានផលិតផលល្អ 12 , ប្រអប់ទី III មាន 20ផលិតផល ក្នុងនេះមានផលិតផលល្អ15 ។ គេយកប្រអប់មួយ រួចគេចាប់យកផលិតផលមួយពីក្នុងប្រអប់នេះដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយគេបានយកផលិតផលល្អ

ចំលើយ

ប្រូបាបដើម្បីអោយគេយកបានផលិតផលល្អ

តាង B_1 : ព្រឹត្តិការណ៍ " ផលិតផលមួយនោះយកចេញពីប្រអប់ទី I "

B_2 : ព្រឹត្តិការណ៍ " ផលិតផលមួយនោះយកចេញពីប្រអប់ទី II "

B_3 : ព្រឹត្តិការណ៍ " ផលិតផលមួយនោះយកចេញពីប្រអប់ទី III "

A : ព្រឹត្តិការណ៍ " យកបានផលិតផលល្អ "

គេបាន $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$

តាមរូបមន្តប្រូបាបសរុប :

$$P(A) = P(B_1).P(A / B_1) + P(B_2).P(A / B_2) + P(B_3).P(A / B_3)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{20} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{4}\right) = \frac{47}{60} \approx 0,7833$$

លំហាត់

31. រោងចក្រពីរផលិតអំពូលអគ្គិសនី 220V ដូចគ្នា ។ ទិន្នផលនៃរោងចក្រទី II ស្មើនឹង 3 ដងទិន្នផលនៃរោងចក្រទី I ។ អត្រាខូចរបស់អំពូលដែលផលិតដោយរោងចក្រទី I និងទី II គឺ 0,1% និង 0,2% ។ ឧបមាថា អំពូលដែលដាក់លក់នៅទីផ្សារជាអំពូលដែលផលិតដោយរោងចក្រទាំងពីរនេះ ។ គេទិញអំពូលមួយដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាប ដើម្បីអោយទិញបានអំពូលខូច ។

ចំលើយ

ប្រូបាបដើម្បីអោយគេទិញបានអំពូលខូច

ឧបមា n ជាអំពូលដែលផលិតដោយរោងចក្រទី I ($n \in N^*$)

អំពូលដែលផលិតដោយរោងចក្រទី II មាន : $3n$

អំពូលដែលដាក់លក់នៅលើទីផ្សារមាន : $n + 3n = 4n$

តាង A_i ព្រឹត្តិការណ៍ : " ទិញប៉ះអំពូលដែលផលិតដោយរោងចក្រទី i " ; $i = 1,2$

B ព្រឹត្តិការណ៍ : " ទិញប៉ះអំពូលខូច "

$$P(A_1) = \frac{C_n^1}{C_{4n}^1} = \frac{n}{4n} = \frac{1}{4} \quad , \quad P(A_2) = \frac{C_{3n}^1}{C_{4n}^1} = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

តាមរូបមន្តប្រូបាបសរុប គេបាន :

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 0{,}1\% + \frac{3}{4}\cdot 0{,}2\% = \frac{1}{4}\cdot 0{,}001 + \frac{3}{4}\cdot 0{,}002$$

$$= \frac{0{,}007}{4} = 0{,}00175$$

លំហាត់

32. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហម 4 , ឃ្លីពណ៌ខៀវ 1 , និង ឃ្លីពណ៌ស 1 ។ គេចាប់យក n ឃ្លីព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញមកក្រៅ ។

ក. គណនាប្រូបាប P_n ដើម្បីអោយគេយកបានឃ្លីយ៉ាងតិចមួយមានពណ៌ក្រៅពីពណ៌ក្រហម

ខ. កំនត់តំលៃ n ដើម្បីអោយប្រូបាប $P_n = 0{,}8$

ចំលើយ

ក. គណនាប្រូបាប P_n

តាង A: ព្រឹត្តិការណ៍ : " ចាប់យក n ឃ្លី បានក្រៅពីឃ្លីក្រហមមួយយ៉ាងតិច"

$\overline{A}$: ព្រឹត្តិការណ៍ " ចាប់យកឃ្លីបានឃ្លីក្រហមទាំងអស់ " ($1 \le n \le 4$)

$$P(\overline{A}) = \frac{C_4^n}{C_6^n} = \frac{4!(6-n)!}{6!(4-n)!} = \frac{(6-n)(5-n)}{6.5} = \frac{30 - 11n + n^2}{30}$$

$$\Rightarrow P_n = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{30 - 11n + n^2}{30} = \frac{11n - n^2}{30}$$

ខ. កំនត់ n ដើម្បីអោយ $P_n = 0{,}8$

$$P_n = 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{11n - n^2}{30} = 0{,}8 \Leftrightarrow 11n - n^2 = 24$$

$$\Leftrightarrow (n-3)(n-8) = 0 \Leftrightarrow n = 3 \text{ រឺ } n = 8$$

ដោយ $n \in IN$ ដែល $1 \le n \le 4$ ដូច្នេះ $P_n = 0{,}8$ កាលណា $n = 3$

លំហាត់

33. ព្រានព្រៃម្នាក់ បាញ់ព្រួញ តំរង់ទៅចាបមួយ ។ ប្រូបាបដើម្បីអោយបាញ់ចាបនោះត្រូវ គឺ : $p = 0{,}44$ ។

ក. ព្រានព្រៃនោះបាញ់ព្រួញ តំរង់ទៅចាបចំនួន n ដង ។ ចូរគណនាប្រូបាប P_n ដើម្បីអោយក្នុងចំនោមការបាញ់ ទាំង n ដងនេះមានត្រូវចាបម្តងយ៉ាងតិច ។

ខ. ចូរគណនាចំនួន n តូចបំផុតដែលនាំអោយ $P_n > 0{,}9$

ចំលើយ

ក. គណនា P_n :

យើងគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ផ្ទុយពោលគឺ ប្រូបាបគ្មានបាញ់ត្រូវចាប សោះ ក្នុងការបាញ់ទាំង n ដង ។ យើងតាង S_n ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នេះ

p ប្រូបាប បាញ់ចាបត្រូវ ស្មើ 0,4

q ប្រូបាប បាញ់ចាបមិនត្រូវ ស្មើ $1-p=0,6$

ដូច្នេះ $S_n = q^n = (0,6)^n$

ជាវិបាក $p_n = 1 - S_n = 1-(0,6)^n$

ខ. **គណនា n ដើម្បីអោយ $p_n > 0,9$**

$$p_n > 0.9 \Leftrightarrow 1-(0,6)^n > 0,9$$
$$\Leftrightarrow (0,6)^n < 0,1$$
$$\Leftrightarrow \log(0,6)^n < \log 0,1$$
$$\Leftrightarrow n\log 0,6 < \log 0,1 = \log 10^{-1}$$
$$\Leftrightarrow n(-0,22) < -1$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{0,22}$$

ដូច្នេះ ចំនួនដែលតូចបំផុត គឺ $n=5$

លំហាត់

34. នៅក្នុងហិបមួយមានកូនបាល់ a ចំនួន 3 កូនបាល់ b ចំនួន 3 និងកូនបាល់ c ចំនួន 4 គេចាប់យកកូនបាល់ 3 ពីក្នុងហិប ដោយយកម្តងមួយៗ ហើយមិនដាក់ទៅវិញ ។

ក. រកប្រូបាប ដើម្បីអោយបានកូនបាល់ ដូចគ្នា

ខ. រកប្រូបាប ដើម្បីអោយបានកូនបាល់មួយក្នុង ចំណោមកូនបាល់ទាំងបីប្រភេទ a , b និង c ។

ចំលើយ

ក. **រកប្រូបាប អោយបាន កូនបាល់ដូចគ្នា**

កូនបាល់ដែលមានប្រភេទដូចគ្នា មានបីយ៉ាងគឺ

- រឺមួយកូនបាល់ប្រភេទ a ទាំងបី :

$$P_1 = \frac{C_3^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_2^1}{C_9^1}\times\frac{C_1^1}{C_8^1} = \frac{3\times2\times1}{10\times9\times8} = \frac{1}{120}$$

- រឺមួយកូនបាល់ប្រភេទ b ទាំងបី :

$$P_2 = \frac{C_3^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_2^1}{C_9^1}\times\frac{C_1^1}{C_8^1} = \frac{3\times2\times1}{10\times9\times8} = \frac{1}{120}$$

- រឺមួយកូនបាល់ប្រភេទ c ទាំងបី :

$$P_3 = \frac{C_4^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_3^1}{C_9^1}\times\frac{C_2^1}{C_8^1} = \frac{4\times3\times2}{10\times9\times8} = \frac{4}{120}$$

ប្រូបាប អោយបានកូនបាល់ប្រភេទដូចគ្នា ជាផលបូកនៃប្រូបាបទាំង 3

$$P = P_1+P_2+P_3 = \frac{1}{120}+\frac{1}{120}+\frac{4}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} = 0,05$$

ខ. ប្រូបាប ដើម្បីអោយបានកូនបាល់មួយក្នុងចំនោមកូនបាល់ទាំងបីប្រភេទ **a , b ,c**

យើងមាន 6 របៀបនឹងបានកូនបាល់ប្រភេទ ទាំងបីខុសគ្នា

$$a,b,c \ : \ P_1' = \frac{C_3^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_3^1}{C_9^1}\times\frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{3\times3\times4}{10\times9\times8}$$

$$a,c,b \ : \ P_2' = \frac{C_3^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_4^1}{C_9^1}\times\frac{C_3^1}{C_8^1} = \frac{3\times4\times3}{10\times9\times8}$$

$$b,a,c \ : \ P_3' = \frac{C_3^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_3^1}{C_9^1}\times\frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{3\times3\times4}{10\times9\times8}$$

$b, c, a \quad : \quad P_4' = \dfrac{C_3^1}{C_{10}^1} \times \dfrac{C_4^1}{C_9^1} \times \dfrac{C_3^1}{C_8^1} = \dfrac{3 \times 4 \times 3}{10 \times 9 \times 8}$

$c, b, a \quad : \quad P_5' = \dfrac{C_4^1}{C_{10}^1} \times \dfrac{C_3^1}{C_9^1} \times \dfrac{C_3^1}{C_8^1} = \dfrac{4 \times 3 \times 3}{10 \times 9 \times 8}$

$c, a, b \quad : \quad P_6' = \dfrac{C_4^1}{C_{10}^1} \times \dfrac{C_3^1}{C_9^1} \times \dfrac{C_3^1}{C_8^1} = \dfrac{4 \times 3 \times 3}{10 \times 9 \times 8}$

ព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗ ខាងលើ សុទ្ធតែជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នា

ដូច្នេះ ប្រូបាប អោយបានកូនបាល់ មានប្រភេទដូចគ្នាគឺ

$$P' = P_1' + P_2' + P_3' + P_4' + P_5' + P_6'$$

$$= 6 \times \frac{4 \times 3 \times 3}{10 \times 9 \times 8} = \frac{3}{10} = 0,3$$

លំហាត់

35. ក. នៅក្នុងហិបមួយមានប៊ូលលេខ A ចំនួន 4 និង ប៊ូលលេខ B ចំនួន 4 ។ គេទាញប៊ូលពីរចេញពីហិប ។ ចូរគណនាប្រូបាប នៃព្រឹត្តិការណ៍ បានប៊ូលពីរលេខខុសគ្នា ។

ខ. សំនួរដដែល ចំពោះករណីដែលក្នុងហិប មានប៊ូលលេខ A ចំនួន n ហើយ ប៊ូលលេខ B ចំនួន n ដែរ ។ តើគេអាចសន្និដ្ឋាន យ៉ាងដូចម្តេចកាលណា n ខិតទៅជិត អនន្ត ។

ចំលើយ

ក. គណនាប្រូបាប នៃព្រឹត្តិការណ៍បានប៊ូលពីរលេខខុសគ្នា

ករណីនៅក្នុងហិបមានប៊ូល 8

ចំនួនករណីអាច ជា ចំនួនបន្សំនៃប៊ូល 2 ជ្រើសរើសក្នុងចំនោមប៊ូលទាំង 8

$$n = C_8^2 = \frac{8.7}{2.1} = 28$$

ដើម្បីអោយបានប៊ូលពីរលេខខុសគ្នា យើងត្រូវជ្រើសរើស ប៊ូលលេខ A មួយ

ក្នុងចំនោមប៊ូលលេខ A ទាំង 4 ហើយនិង ប៊ូលលេខ B មួយក្នុងចំនោមប៊ូលលេខ B ទាំងបួន ។ ព្រឹត្តិការណ៍ បានប៊ូលពីរលេខខុសគ្នា មានករណីស្រប

ចំនួន $n = C_4^1 \times C_4^1 = 4 \times 4 = 16$

ដូច្នេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងលើនេះគឺ :

$$P = \frac{n}{N} = \frac{16}{28} = 0,571$$

ខ. ករណីក្នុងហិបមានប៊ូល **2n**

ក្នុងករណីនេះ ចំនួនករណើអាចគឺ :

$$N = C_{2n}^2 = \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{2.1} = n(2n-1)$$

ចំនួនករណីស្រប $n = C_n^1 \, . \, C_n^1 = n \, . \, n = n^2$

ប្រូបាប ដែលត្រូវរកគឺ : $P = \dfrac{n}{N} = \dfrac{n^2}{n(2n-1)} = \dfrac{n}{2n-1}$

យើងអាចសរសេរបន្តទៀត ដូចខាងក្រោម :

$$P = \frac{n}{2n-1} = \frac{n}{n(2-\frac{1}{n})} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}}$$

ដូច្នេះ កាលណា n ខិតជិតអនន្ត យើងបាន :

$$\lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2-\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2}$$

យើង សន្និដ្ឋានថា P ខិតជិត $\dfrac{1}{2}$ កាលណា n ខិតជិតអនន្ត ។

លំហាត់

36. នៅលើការផលិតអាវនារី គេសំគាល់ឃើញដោយស្ទង់ថា 3% អាវនារីដែលបង្ហាញកំហុសពណ៌ (កំនត់ដោយ " កំហុស a " ក្នុងការផលិត) ។ 2% អាវនារីដែលបង្ហាញកំហុសការកាត់ (កំនត់ដោយ " កំហុស b ")

គេសំរេចចិត្តលក់បុះថ្លៃអាវនារីដែលបង្ហាញយ៉ាងតិចមានកំហុសមួយ

គេសំគាល់ A : ព្រឹត្តិការណ៍ " អាវនារីដែលបង្ហាញកំហុស a "

B : ព្រឹត្តិការណ៍ " អាវនារីដែលបង្ហាញកំហុស b "

S : ព្រឹត្តិកាណ៍ " អាវនារីដែលមានកំហុស a រឺ b "

ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា

ក. កំនត់ប្រូបាបដើម្បីអោយអាវនារីមួយដែលមានកំហុស a និង b

ខ. ដោយទាញប្រូបាប p នៃព្រឹត្តិការណ៍ S ។

ចំលើយ

ក. កំនត់ប្រូបាបដើម្បីអោយអាវនារីមួយដែលមានកំហុស a និង b

យើងមាន $P(A)=\frac{3}{100}=0,03$, $P(B)=\frac{2}{100}=0,02$

តាង C : ព្រឹត្តិការណ៍ " អាវនារីមួយដែលបង្ហាញនូវកំហុសពីរ a និង b "

$P(C)=P(A\cap B)$ តែដោយសម្មតិកម្ម A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ។

គេអាចសរសេរ $P(C)=P(A)\cdot P(B)=0,03\times 0,02=0,0006$

ខ. **ទាញប្រូបាប p នៃព្រឹត្តិការណ៍ S**

យើងមាន : $S=A\cap B$

$$\Rightarrow P(S)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=0,03+0,02-0,0006=0,0494=p$$

លំហាត់

37. នៅក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 15 ។ នៅលើប៊ូលនីមួយៗ គេសរសេរ លេខមួយ ដែលនៅចន្លោះ 0 និង 9 ។ ចំពោះលេខគូមួយ គេសរសេរនៅលើប៊ូលពីរ ចំនែកឯលេខសេសវិញគេ សរសេរនៅលើប៊ូលតែមួយទេ ។ គេទាញប៊ូល

មួយម្តងចេញពីថង់ ហើយកត់លេខដែលនៅលើប៊ូល ។

1. ចូរគណនាប្រូបាប ដើម្បីបានលេខ 1,6,3 និង 6 នៅក្នុងលំដាប់នេះ ក្នុងករណី :

ក. គេដាក់ទៅក្នុងថង់វិញ នូវប៊ូលដែលទាញហើយ

ខ. គេមិនដាក់ទៅវិញទេ នូវប៊ូលដែលទាញហើយ

2. សំនួរដូចគ្នា ខាងលើនេះ កាលណាគេមិនគិតលំដាប់នៃការចេញលទ្ធផល 1,6,3 និង 6 ។

ចំលើយ

1. **ព្រឹត្តិការណ៍បាន 1,6,3,6 នៅក្នុងលំដាប់នេះ**

ក. ករណីទាញហើយដាក់ទៅវិញ

យើងដឹងថានៅក្នុងចំនោមប៊ូលទាំង 15 មានប៊ូលលេខ 1 មួយ , ប៊ូលលេខ 6ពីរ ហើយប៊ូលលេខ 3 មួយ ។

ដោយ យើងទាញហើយដាក់វិញ ដូចនេះយើងបានព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ។

ប្រូបាបដែលត្រូវរកគឺ :

$$P=P(1)\times P(6)\times P(3)\times P(6)$$

$$=\frac{1}{15}\times\frac{2}{15}\times\frac{1}{15}\times\frac{2}{15}=\frac{4}{50625}\approx 0,00008$$

ខ. ករណីទាញហើយមិនដាក់ទៅវិញ

ក្នុងករណីនេះយើងបាន :

$$P'=P(1)\times P(6/1)\times P(3/1.6)\times P(6/1,6,3)$$

$$P(1)=\frac{1}{15}\,,\ P(6/1)=\frac{2}{14}\,,\ P(3/1,6)=\frac{1}{13}\,,\ P(6/1.6,3)=\frac{1}{12}$$

$$P'=\frac{1}{15}\times\frac{2}{14}\times\frac{1}{13}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{16380}\approx 0,00006$$

2. **ព្រឹត្តិការណ៍បានលេខ 1,6,3 និង 6 ដោយមិនគិតលំដាប់លេខដែលចេញ**

ក. ករណីទាញហើយដាក់ទៅវិញ

យើងដឹងថា វាមានព្រឹត្តិការណ៍ 12 ដែលផ្តល់លទ្ធផលដូចគ្នា :

$E_1 = (1,3,6,6)$ $\quad E_7 = (6,1,6,3)$

$E_2 = (3,1,6,6)$ $\quad E_8 = (6,3,6,1)$

$E_3 = (1,6,3,6)$ $\quad E_9 = (6,6,1,3)$

$E_4 = (3,6,1,6)$ $\quad E_{10} = (6,6,3,1)$

$E_5 = (6,1,3,6)$ $\quad E_{11} = (1,6,6,3)$

$E_6 = (6,3,1,6)$ $\quad E_{12} = (3,6,6,1)$

ព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 12 នេះមានប្រូបាបស្មើគ្នា ហើយស្មើនឹង $P = 0{,}00008$

$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots \cup E_{12}$

$P(E) = 12 \times p = 12 \times 0{,}00008 = 0{,}000096$

សំគាល់ : (ចំនួនព្រឹត្តិការណ៍ 12 ខាងលើនេះជាចំនួនចំលាស់នៃបួនលេខ

1,6,3 និង 6 តគ្នាគឺ : $12 = \dfrac{4!}{2!}$)

ខ. ករណីទាញហើយមិនដាក់ទៅវិញ

យើងហៅ E' ព្រឹត្តិការណ៍លេខ 1 មួយ , 6 ពីរ និង លេខ 3 មួយ ។

តាមសំរាយបញ្ជាក់ខាងលើយើងបាន :

$P(E') = 12 \times P' = 12 \times 0{,}00006 = 0{,}00072$

លំហាត់

38. គេបានសំគាល់ឃើញថា ថ្នាំបង្ការោគផ្តល់គ្រោះថ្នាក់ធ្ងន់ធ្ងរមួយ ចំពោះការ ចាក់ថ្នាំបង្ការោគ 3000 ។ គេចាក់ថ្នាំបង្ការោគនៃមនុស្ស 20000 នាក់ ។

គណនាប្រូបាប ក. ដែលគ្មានម្នាក់គ្រោះថ្នាក់ ខ. មានម្នាក់គ្រោះថ្នាក់

គ. មានគ្រោះថ្នាក់យ៉ាងតិចលើសពីម្នាក់

ចំលើយ

តាង x ជាព្រឹត្តិការណ៍ប្រែប្រួល ដែលកំនត់ដោយ

" $x = k$ " ដែល k ជាចំនួនគ្រោះថ្នាក់ក្នុងចំនោមមនុស្ស 20000

ដែលចាក់ថ្នាំបង្ការោគ ។ តាមការប្រែប្រួលនៃច្បាប់ Bernouilli $B(n,p)$

ដោយ $n = 20\,000$ និង $p = \dfrac{1}{3000}$

$\Rightarrow P(x = k) = C_n^k P^k (1-p)^{n-k}$ ដោយ $0 \le k \le n$

ក. គ្មានម្នាក់គ្រោះថ្នាក់

$$P(x=0) = C_{20000}^{0}\left(\frac{1}{3000}\right)^{0}\left(\frac{2999}{3000}\right)^{20000} = \left(\frac{2999}{3000}\right)^{20000}$$

$P(x=0) \approx 0{,}00127$

ខ. មានម្នាក់គ្រោះថ្នាក់

$$P(x=1) = C_{20000}^{1}\left(\frac{1}{3000}\right)^{1}\left(\frac{2999}{3000}\right)^{19999}$$

$$P(x=1) = 20000\,\frac{1}{3000}\left(\frac{2999}{3000}\right)^{19999} = \frac{20}{3}\left(\frac{2999}{3000}\right)^{19999}$$

$\approx 0{,}00848$

គ. មានគ្រោះថ្នាក់យ៉ាងតិចលើសពី ម្នាក់

$P(x > 1) = P(x=2) + P(x=3) + \cdots + P(x=20000)$

យើងប្រើព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ

$P(x > 1) = 1 - \left[P(x=0) + P(x=1)\right]$

$= 1 - (0{,}00127 + 0{,}00848) \approx 0{,}99025$

លំហាត់

39. ក្នុងហិបមួយមានប៉ូល10 ពណ៌ស និង ប៊ូល18 ពណ៌ក្រហម **ដែលមិនអាច**

ចំណេះបានដោយស្មាបទេ ។ គេសន្មត់វិញ្ញាសាដែល ស្ថិតនៅដោយការទាញ ដោយចៃដន្យ ជាបន្តបន្ទាប់ហើយគ្មានការដាក់ទៅវិញ នូវប៊ូលទាំងពីរ ក្នុងហិប ។ ប៊ូលមួយបន្ទាប់ពីទាញប៊ូលមួយទៀត ។ គេនឹងទទួលបានលទ្ធផល នីមួយៗ នូវតំលៃពិតប្រាកដនិង តំលៃមួយខិតជិតក្បែរ 10^{-2} ។

ក. ចូរកំនត់ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម :

E : " ទាញប៊ូលលើកទី 1 បានពណ៌ស "

F : " គេទាញប៊ូលលើកទី 1 ពណ៌ស មុនពេលគេទាញប៊ូលលើកទី 2 "

ខ. គេទាញសារឡើងវិញ 5 ដងរៀងវិញ្ញាសាមុន

(បន្ទាប់ពីវិញ្ញាសានីមួយៗទាញ ប៊ូលពីរដាក់ទៅក្នុងហិបវិញ) ។

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

G: " E មានឡើងពិតប្រាកដ 2 ដង "

H: " F មានឡើងយ៉ាងតិចមួយដង "

ចំលើយ

ក្នុងហិបមានប៊ូលទាំងអស់ 28 គឺ 10 ពណ៌ស និង 18 ពណ៌ក្រហម វិញ្ញាសា ដែលទាញចេញប៊ូលទីមួយ បន្ទាប់មកទាញប៊ូលមួយទៀតមិនដាក់ទៅវិញ ។

ក. **គណនា P(E)**

- E : ព្រឹត្តិការណ៍ " ទាញប៊ូលលើកទីមួយបានពណ៌ ស "

ចំនួនករណីអាច $A_{28}^{2} = 28\times 27 = 756$

$$P(E) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \approx 0{,}35$$

- F ទាញប៊ូលលើកទីមួយបានពណ៌ស មុនពេលទាញប៊ូលលើកទី 2

$$P(F) = \frac{18}{27}\times\frac{10}{28} = \frac{180}{756} = \frac{5}{21} \approx 0{,}23$$

ខ. គណនាប្រូបាប

- G ព្រឹត្តិការណ៍ " E មានឡើងពិតប្រាកដពីរដង "

នៅទីនេះ យើងយកច្បាប់ Binomiale មកអនុវត្តន៍

$\beta(n,p)$ ដោយ $n = 5$ និង $p = p(E) = \frac{5}{14}$ ព្រឹត្តិការណ៍ E មានឡើង 2ដង ។

ដូច្នេះ $\overline{E}$ មានឡើង 3 ដងដោយ $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = \frac{9}{14}$

$$P(G) = C_5^2\left(\frac{5}{14}\right)^2\left(\frac{9}{14}\right)^3 = 10\left(\frac{5}{14}\right)^2\left(\frac{9}{14}\right)^3 \approx 0{,}34$$

- H ព្រឹត្តិការណ៍ " F មានឡើងយ៉ាងតិចមួយដង "

យើងអនុវត្តន៍ច្បាប់ Binomial $\beta(n,p)$

ដោយ $n = 5$ និង $p = p(F) = \frac{5}{21}$ និង $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = \frac{16}{21}$

$\overline{H}$: " F មិនមានឡើង "

$$P(\overline{H}) = \left(\frac{16}{21}\right)^5 \Rightarrow P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - \left(\frac{16}{21}\right)^5 \approx 0{,}74$$

សូមរង់ចាំសិក្សាភាគ ៤

ដែលជាមេរៀនថ្មីបន្តទៀត !

វាយកំព្យូទ័រដោយ : ហេង ណារិន និង សេង ពិសិដ្ឋ

មានទីតាំង : សាលារៀន ឆាយ សុជាតិ ផ្ទះលេខ 8 ផ្លូវលេខ 276 សង្កាត់បឹងកេងកង 2 ខណ្ឌចំការមន រាជធានីភ្នំពេញ ខាងក្រោយវិទ្យាល័យព្រះយុគន្ធរ ចំងាយ 70m) ។

Tel : (012) 866-818