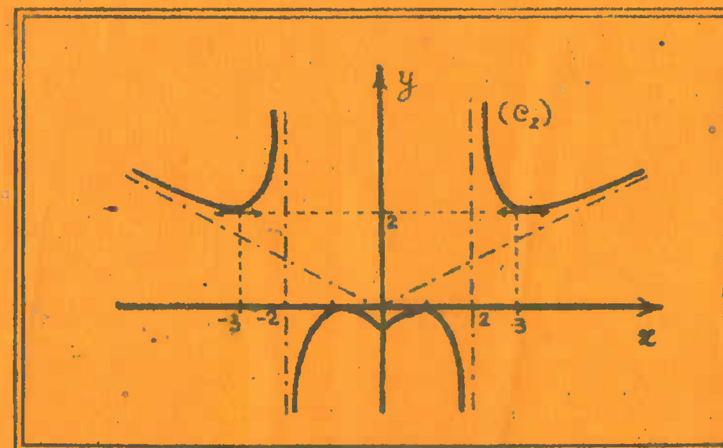
$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k \sin\frac{x}{2^k}\, \operatorname{tg}^2\frac{x}{2^{k+1}} = \operatorname{tg}x - 2^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} du_k$$

វិញ្ញាសា

គណិតវិទ្យា

ជ្រើសរើស



$$\log_a\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \log_a x_i \,,\ (x_i>0, a>0, a\neq 1)$$

ថ្នាក់ទី 12

លឹម ឃុសេង

លឹម យូសេខ

សាស្ត្រាចារ្យផ្នែកគណិតវិទ្យា

នៃមហាវិទ្យាល័យសេដ្ឋកិច្ច ភ្នំពេញ

វិញ្ញាសាទី 1

I ដោះស្រាយវិសមីការ:

1- $\log_2(4^x - 5.2^x + 2) > 2$

2- $\log_{x-3}(x^2+4x-5) > \log_{2-3}(x-1)$

II គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x} & \text{បើ } x \neq 0 \\ 0 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f មានបន្ទាត់ប៉ះមួយត្រង់គល់ 0 នៃតំរុយ ។ កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះនេះ ។

III គេអោយអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ: $y = f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)}$

1- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

2- កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដោយដឹងថាបន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំនុច $A(0, 2)$ ។

3- ពីខ្សែកោង $(C): y = f(x)$, ទាញបង្ហាញខ្សែកោង $(C_1): y = |f(x)|$ និង $(C_2): y = f(|x|)$ ។

4- ដោយប្រើខ្សែកោង (C), ពិភាក្សាតាមតំលៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ចំនួនឬសនៃសមីការ: $x^2 - 2(1+m)x + 1 + 4m = 0$

IV គេអោយពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត SABCD មួយមានបាតជាការេ ABCD ដែលជ្រុងមានរង្វាស់ស្មើ a, កំពស់ពីរ៉ាមីតមានរង្វាស់ h ។ ប្លង់ (P) មួយកាត់ A ហើយកែងនឹង (SC) ត្រង់ C' និងប្រសព្វជាមួយ (SB), (SD) ត្រង់ B' និង D' ។

1- តើ h ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌអ្វី ដើម្បីឲ្យ C' ស្ថិតនៅលើអង្កត់ $[SC]$?

ក្នុងករណីនេះ ចូរគណនាក្រលាផ្ទៃនៃមុខកាត់ $AB'C'D'$ ។

2- គណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABC'D'$

3- ស្រាយបញ្ជាក់ថា ត្រីកោណ $B'C'D'$ មានមុំមួយជាមុំទាល ។

សំរាយបញ្ជាក់

I.-1) ដោះស្រាយវិសមីការ: $\log_2(4^x-5.2^x+2)>2$

វិសមីការអាចសរសេរជា :

$$\log_2(2^{2x}-5.2^x+2)>\log_2 4 \Leftrightarrow 2^{2x}-5.2^x+2>4$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x}-5.2^x-2>0$$
$$\Leftrightarrow u^2-5u-2>0 \text{ ដោយ } u=2^x>0$$

បើ $u^2-5u-2=0 \Rightarrow u_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$, $u_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}<0$ (ចោល)

សញ្ញានៃ u^2-5u-2

u		$\frac{5-\sqrt{33}}{2}$		0		$\frac{5+\sqrt{33}}{2}$	
u^2-5u-2	+	0	−		−	0	+

តាមតារាងសញ្ញានេះ គេបាន $u^2-5u-2>0$ ចំពោះ:
$u>\frac{5+\sqrt{33}}{2}$

$$u>\frac{5+\sqrt{33}}{2}\Leftrightarrow 2^x>\frac{5+\sqrt{33}}{2} \quad (\text{ព្រោះ: } u=2^x)$$
$$\Rightarrow x>\log_2\frac{5+\sqrt{33}}{2}=\log_2(5+\sqrt{33})-\log_2 2$$
$$=\log_2(5+\sqrt{33})-1$$

សំនុំឫសនៃវិសមីការគឺ $\boxed{x\in S=]\log_2(5+\sqrt{33})-1;+\infty[}$

2)- ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{x-3}(x^2+4x-5)>\log_{x-3}(x-1)$

ដើម្បីនឹងដោះស្រាយទៅតាមគោល $a=x-3>1$ ឬ $0<a=x-3<1$

វិសមីការនេះសមមូលនឹងប្រព័ន្ធវិសមីការ :

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3>1\\x^2+4x-5>x-1\\x-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x-3<1\\x^2+4x-5<x-1\\x^2+4x-5>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>4\\x^2+3x-4>0\\x>1\end{cases}\\ \begin{cases}3<x<4\\x^2+3x-4<0\\x^2+4x-5>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l}\begin{cases}x>4\\x<-4 \text{ ឬ } x>1\\x>1\end{cases}\\ \begin{cases}3<x<4\\-4<x<1\\x<-5 \text{ ឬ } x>1\end{cases}\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in]4,+\infty[\\x\in\emptyset\end{array}\right. \Rightarrow x\in]4,+\infty[$$

សំនុំឫសនៃវិសមីការគឺ: $\boxed{x\in S=]4,+\infty[}$

II ស្រាយថាក្រាបនៃអនុគមន៍ f មានបន្ទាត់ប៉ះមួយត្រង់គល់ O នៃតំរុយ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos 2x}{x} & \text{បើ } x\neq 0\\ 0 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

ក្រាបនៃអនុគមន៍ f មានបន្ទាត់ប៉ះមួយត្រង់គល់ $O(0,0)$ នៃតំរុយ កាលណាអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំនុច $x_0=0$ ។

យើងមាន :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos 2x}{x}-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2$$

ដោយអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំនុច $x_0=0$ ដូចនេះក្រាបនៃអនុគមន៍ f មានបន្ទាត់ប៉ះមួយត្រង់ $O(0,0)$ និងមានមេគុណប្រាប់ទិស $k=f'(0)=2$ ។

បន្ទាត់ប៉ះនេះមានសមីការ :

$$y-y_1=k(x-x_0)\Leftrightarrow y-0=2(x-0)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

III. 1. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) $y=f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)}$

- ដែនកំណត់: $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$
- ទិសដៅអថេរភាព

• ដេរីវេ: $y'=\dfrac{4(x-1)(x-2)-2(x-1)^2}{4(x-2)^2}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{2(x-2)^2}$

$y'=0 \iff (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=3$

• បរមា:

$x=1 \Rightarrow y=f(1)=0$

$x=3 \Rightarrow y=f(3)=2$

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)}=\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)}=\pm\infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ម្យ៉ាងទៀត អនុគមន៍ $y=f(x)$ អាចសរសេរជា:

$y=\dfrac{[(x-2)+1]^2}{2(x-2)}=\dfrac{(x-2)^2+2(x-2)+1}{2(x-2)}=\dfrac{x-2}{2}+1+\dfrac{1}{2(x-2)}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2(x-2)}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2(x-2)}=0 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y=\dfrac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

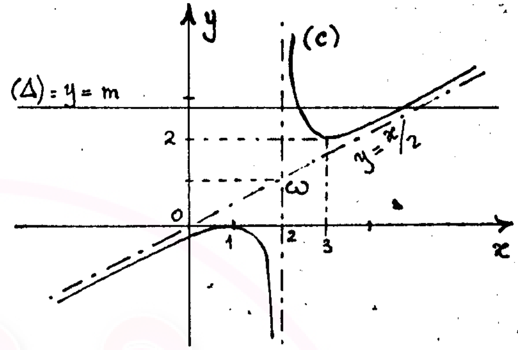
• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$y'=f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$y=f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

- ក្រាប

• ចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាប និងអ័ក្ស: $x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{4}$

• ចំនុច $\omega(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប



2. សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ដែលគូសចេញពីចំនុច $A(0,2)$

បន្ទាត់ដែលប៉ះតាម $A(0,2)$ មានសមីការ: $(D_k): y=kx+2$

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D_k) គឺ:

$\dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)}=kx+2 \iff (x-1)^2=2(x-2)(kx+2) \quad (x\neq 2)$

$\iff (2k-1)x^2+2(3-2k)x-9=0 \quad (1)$

បន្ទាត់ (D_k) ប៉ះនឹងក្រាប (C) កាលណាសមីការ (1) មានឫសឌុបគឺ

$\Delta'=0 \iff (3-2k)^2+9(2k-1)=0$

$\iff 4k^2+6k=0 \Rightarrow k=0$ ឬ $k=-\frac{3}{2}$

ដូច្នេះមានបន្ទាត់ពីរដែលកាត់តាម $A(0,2)$ ហើយប៉ះនឹង (C) គឺ:

- ចំពោះ $k=0$: $(D_0): y=2$
- ចំពោះ $k=-\frac{3}{2}$: $(D_{-3/2}): y=-\frac{3}{2}x+2$

3. ទាញបញ្ចេញក្រាប $(C_1): y=|f(x)|$ និង $(C_2): y=f(|x|)$

យើងមាន:

$(C_1): y=|f(x)|=\left|\dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)}\right|=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)} & \text{បើ } \dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)}\geq 0\\[2ex] -\dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)} & \text{បើ } \dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)}<0\end{cases}$

ដូច្នេះក្រាប (C_1) មានពីរផ្នែកគឺ:

(I): ជាផ្នែកនៃក្រាប (C) ដែលស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

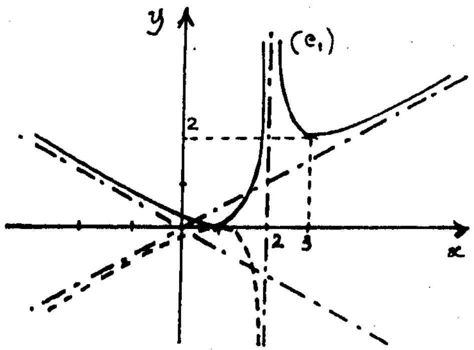
(II): ជាផ្នែកឆ្លុះនៃក្រាប (C) ដែលនៅក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីសធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

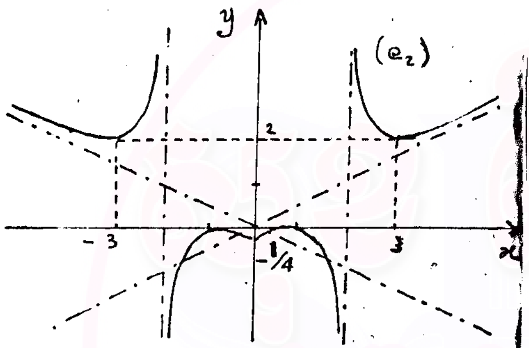
$$(C_2): y = f(|x|) = \frac{(|x|-1)^2}{2(|x|-2)} = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)} & \text{បើ } x \geqslant 0 \\[2mm] \dfrac{(-x-1)^2}{2(-x-2)} & \text{បើ } x < 0 \end{cases}$$

ដូច្នេះក្រាប (C_2) មានពីរផ្នែក៖

-(I)៖ ជាផ្នែកនៃក្រាប (C) ដែលនៅខាងស្តាំអ័ក្ស $\vec{Oy}$

-(II)៖ ជាផ្នែកឆ្លុះនៃផ្នែកទី(I) ធៀបនឹងអ័ក្ស $\vec{Oy}$





4. <u>ចំនួនឬសនៃសមីការ $x^2-2(1+m)x+1+4m=0$</u> (1)

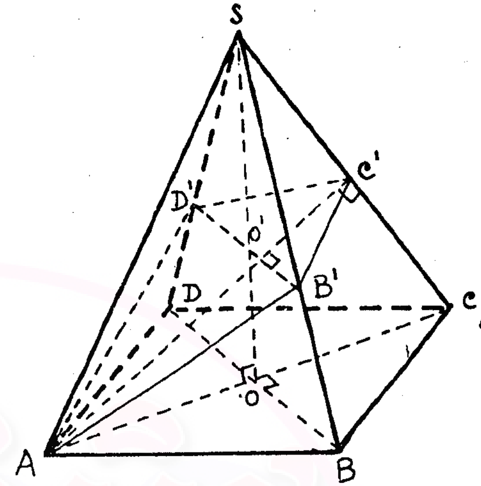
សមីការ (1) អាចសរសេរជា

$x^2-2x+1=2(x-2)m \iff \dfrac{(x-1)^2}{2(x-2)} = m$ នេះជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $(\Delta): y = m$ កាត់ក្រាប (C) ដោយបន្ទាត់ (Δ), គេបាន៖

- បើ $m \in]-\infty, 0[$: (1) មានឬសពីរផ្សេងគ្នា $x_1 < x_2$
- បើ $m = 0$: (1) មានឬសឌុប $x_1 = x_2 = 1$
- បើ $m = 2$: (1) មានឬសឌុប $x_1 = x_2 = 3$
- បើ $m \in]2, +\infty[$: (1) មានឬសពីរផ្សេងគ្នា $x_1 < x_2$
- បើ $m \in]0, 2[$: (1) គ្មានឬស

IV. 1. <u>លក្ខខណ្ឌនៃ h ដើម្បីឲ្យ $C' \in [SC]$</u>

យើងមាន៖



$(AB'C'D') \perp (SC) \Rightarrow (SC) \perp (AC')$

$SABCD$ ជាពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត $\Rightarrow$ SAC ជាត្រីកោណសមបាត $(|SA| = |SC|)$ ដែលមានកំពស់ $[AC']$ និង $[SO]$ ជាកំពស់ពីរ៉ាមីត, ។ $C' \in [SC]$ កាលណា $\widehat{ASC}$ ជាមុំស្រួច ក្នុងករណីនេះ គេបាន៖

$|AC|^2 < |SA|^2 + |SC|^2 = 2|SA|^2$ (1)

តែ $|SA|^2 = |SO|^2 + |AO|^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$

ដូច្នេះ: (1) $\Rightarrow (a\sqrt{2})^2 < 2\left(h^2 + \frac{a^2}{2}\right) \iff h^2 > \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow h > \frac{a\sqrt{2}}{2}$

ដូច្នេះ: $C' \in [SC]$ កាលណា $\boxed{h > \frac{a\sqrt{2}}{2}}$

<u>ក្រលាផ្ទៃមុខកាត់ $AB'C'D'$</u>

យើងមាន

$\left.\begin{array}{l}(SC) \perp (P) \\ (SC) \subset (SAC)\end{array}\right\} \Rightarrow (SAC) \perp (P)$ ឬ $(P) \perp (SAC)$

$\left.\begin{array}{l}(BD) \perp (SAC) \\ (BD) \subset (SBD)\end{array}\right\} \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$

$\left.\begin{array}{l}(P) \perp (SAC) \\ (SBD) \perp (SAC) \\ (P) \cap (SBD) = (B'D')\end{array}\right\} \Rightarrow (B'D') \perp (SAC)$

$\left.\begin{array}{l}(B'D') \perp (SAC) \\ (AC') \subset (SAC)\end{array}\right\} \Rightarrow (B'D') \perp (AC')$

ដូចនេះ ក្រលាផ្ទៃនៃចតុកោណ $AB'C'D'$ កំនត់ដោយ៖

$S_1 = \frac{1}{2}|B'D'||AC'|$

ចំពោះត្រីកោណសមបាត SAC គេបាន៖

$|AC'|.|SC| = |SH|.|AC| \Rightarrow |AC'| = \dfrac{|SH|.|AC|}{|SC|} = \dfrac{h \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}$ (ព្រោះ $|SC| = |SA|$)

$$|AC'| = \frac{2ah}{\sqrt{2h^2 + a^2}}$$

ត្រីកោណកែង AOO' និង SOC មាន $\hat{A} = \hat{S}$ ជាត្រីកោណដូចគ្នា, គេបាន:

$$\frac{|OO'|}{|OC|} = \frac{|AO|}{|SO|} \Rightarrow |OO'| = \frac{|OC|.|AO|}{|SO|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{h} = \frac{a^2}{2h}$$

$$|SO'| = |SO| - |OO'| = h - \frac{a^2}{2h} = \frac{2h^2 - a^2}{2h}$$

ម្យ៉ាងទៀត: $(B'D') \perp (SAC)$ និង $(BD) \perp (SAC)$ គេបាន $(B'D') \parallel (BD)$

$(B'D') \parallel (BD) \Rightarrow \dfrac{|B'D'|}{|BD|} = \dfrac{|SC'|}{|SO|}$

$$\Rightarrow |B'D'| = \frac{|SO'|.|BD|}{|SO|} = \frac{\frac{2h^2 - a^2}{2h} \cdot a\sqrt{2}}{h} = \frac{\sqrt{2}\, a(2h^2 - a^2)}{2h^2}$$

ដូច្នេះក្រលាផ្ទៃនៃចតុកោណ $AB'C'D'$ គឺ:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}\, a(2h^2 - a^2)}{2h^2} \cdot \frac{2ah}{\sqrt{2h^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{2}\, a^2(2h^2 - a^2)}{2h\sqrt{2h^2 + a^2}}$$

$$\boxed{S_1 = \frac{a^2(2h^2 - a^2)}{h\sqrt{2(2h^2 + a^2)}}}$$

2. <u>មាឌនៃពីរ៉ាមីត $SAB'C'D'$</u>

មាឌនៃពីរ៉ាមីត $SAB'C'D'$ កំនត់ដោយ $V = \frac{1}{3} S_1 |SC'|$

ត្រីកោណ $SC'A$ កែងត្រង់ C' (ព្រោះ $(P) \perp (SC')$), គេបាន:

$$|SC'|^2 = |SA|^2 - |AC'|^2 = \frac{2h^2 + a^2}{2} - \frac{4a^2h^2}{2h^2 + a^2} = \frac{(2h^2 - a^2)^2}{2(2h^2 + a^2)}$$

$$\Rightarrow |SC'| = \frac{2h^2 - a^2}{\sqrt{2(2h^2 + a^2)}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2(2h^2 - a^2)}{h\sqrt{2(2h^2 + a^2)}} \cdot \frac{2h^2 - a^2}{\sqrt{2(2h^2 + a^2)}} = \frac{a^2(2h^2 - a^2)^2}{6h(2h^2 + a^2)}$$

$$\boxed{V = \frac{a^2(2h^2 + a^2)^2}{6h(2h^2 + a^2)}}$$

3. <u>ត្រីកោណ $B'C'D'$ មានមុំទាលមួយ</u>

O' ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[B'D']$ (ព្រោះ $[B'D'] \parallel [BD] \Rightarrow$ (SO) កាត់ $[B'D']$ ត្រង់ចំនុចកណ្តាល O')

$(AC') \perp [B'D']$ ត្រង់ចំនុចកណ្តាល $O \Rightarrow (AC')$ ជាមេដ្យាទ័រនៃ $[B'D']$

ដូចនេះ $\Delta B'C'D'$ សមបាត $(|C'B'| = |C'D'|) \Rightarrow \widehat{B'C'D'} = 2\widehat{B'C'O'}$

ត្រីកោណ $B'O'C'$ កែងត្រង់ O', គេបាន:

$$\operatorname{tg} \widehat{B'C'O'} = \frac{|O'B'|}{|O'C'|}$$

ដែល $|O'B'| = \frac{1}{2}|B'D'| = \dfrac{\sqrt{2}\, a(2h^2 - a^2)}{4h^2}$

$$|O'C'|^2 = |SO'|^2 - |SC'|^2 = \frac{(2h^2 - a^2)^2}{4h^2} - \frac{(2h^2 - a^2)^2}{2(2h^2 + a^2)} = \frac{a^2(2h^2 - a^2)^2}{4h^2(2h^2 + a^2)}$$

$$\Rightarrow |O'C'| = \frac{a(2h^2 - a^2)}{2h\sqrt{2h^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \widehat{B'C'O'} = \frac{|O'B'|}{|O'C'|} = \frac{\sqrt{2}\, a(2h^2 - a^2)}{4h^2} \cdot \frac{2h\sqrt{2h^2 + a^2}}{a(2h^2 - a^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2h^2 + a^2}}{2h} = \frac{\sqrt{4h^2 + 2a^2}}{2h} = \sqrt{\frac{4h^2 + 2a^2}{4h^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{a^2}{2h^2}} > 1$$

$\operatorname{tg} \widehat{B'C'O'} > 1 \Rightarrow \widehat{B'C'O'} > \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow \widehat{B'C'O'} = 2\widehat{B'C'D'} > \frac{\pi}{2}$

ដោយ $\widehat{B'C'D'} > \frac{\pi}{2}$ ដូច្នេះ<u>ត្រីកោណសមបាត $B'C'D'$ មាន $\widehat{B'C'D'}$ ជាមុំទាល</u> ។

វិញ្ញាសាទី 2

I. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត ៖ $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ ដែលមានផលសងរួម $d>0$ និងស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖ $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ដែលតួដំបូង $b_1>0$ និងផលធៀបរួម $q>0$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថាមានចំនួន c មួយដែលធ្វើឲ្យផលដក ៖
$\log_c b_n - a_n$ មិនអាស្រ័យនឹង n ។

II. គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ ៖ $f(x) = \cos^2 x + \sin^3 x$

1. គណនា $f(\pi/4)$ និង $f(\pi/3)$
2. គណនា $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

III. គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x-1}$

1. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ ។ បង្ហាញថា ខ្សែកោង (c) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយ ។
2. (D) គឺជាបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ a ហើយកាត់តាមចំណុច I នៃអ័ក្ស Ox ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ (-1) ។ ពិភាក្សាតាមតម្លៃ a ចំនួនចំណុចប្រសព្វនៃ (D) និង (c) ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ដែលគូសចេញពី I និងរកកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ ។ បកស្រាយតាមក្រាភិច ការពិភាក្សានេះ ដោយគូសឆូតផ្នែកនៃប្លង់ដែលបន្ទាត់ (D) មិនកាត់ខ្សែកោង (c) ។
3. ក្នុងករណីដែលបន្ទាត់ (D) កាត់ (c) ត្រង់ពីរចំណុច A និង B, ចូររកកូអរដោនេចំណុចកណ្តាល M នៃ [AB] និងចំណុច J ដែលឆ្លាស់អាម៉ូនិចនឹង I ធៀបនឹង A និង B ។ រកនិងសង់ក្នុងក្រាភិចមួយនូវសំណុំ (H) នៃចំណុច M និងសំណុំ (Δ) នៃចំណុច J ។
បង្ហាញចំណុចដែលត្រូវកាត់សំគាល់នៃ (c) ទៅលើ (H) និង (Δ)

IV. គេឲ្យពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត SABCD មានជ្រុងបាត $|AB| = a$ និង $\widehat{ASB} = 2\alpha$ ។

1. គណនាក្រឡាផ្ទៃសរុបនៃពីរ៉ាមីត ។
2. គណនាមាឌកោណចារឹកក្រៅពីរ៉ាមីត SABCD ។ កំណត់ α ដើម្បីឲ្យមាឌកោណស្មើនឹង $\dfrac{\pi a^3}{12}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

I. ស្រាយបញ្ជាក់ថាមាន c មួយដែលធ្វើឲ្យ $\log_c b_n - a_n$ មិនអាស្រ័យនឹង n

ស្វ៊ីតនព្វន្ត ៖ $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ មានតួទី n ៖ $a_n = a_1 + (n-1)d$

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖ $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$ មានតួទី n ៖ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
\log_c b_n - a_n &= \log_c(b_1 q^{n-1}) - [a_1 + (n-1)d] \quad (b_n>0, q>0)\\
&= \log_c b_1 + (n-1)\log_c q - a_1 - (n-1)d\\
&= \log_c b_1 + n\log_c q - \log_c q - a_1 - nd + d\\
&= n(\log_c q - d) + \log_c b_1 - \log_c q - a_1 + d
\end{aligned}$$

ផលដក $\log_c b_n - a_n$ មិនអាស្រ័យ n កាលណា $\log_c q - d = 0$

$\log_c q - d = 0 \Leftrightarrow \log_c q = d \Leftrightarrow q = c^d$

$\Rightarrow c = q^{1/d}$

ដូចនេះមានចំនួន c មួយដែលធ្វើឲ្យ $\log_c b_n - a_n$ មិនអាស្រ័យនឹង n គឺ

$$\boxed{c = q^{1/d}}$$

II. $f(x) = \cos^2 x + \sin^3 x$

1. គណនា $f(\pi/4)$ និង $f(\pi/3)$

យើងមាន:

$$f(\pi/4) = \cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^3\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3 = \frac12 + \frac{\sqrt2}{4} = \frac{2+\sqrt2}{4}$$

$$f(\pi/3) = \cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^3\frac{\pi}{3} = \left(\frac12\right)^2 + \left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^3 = \frac14 + \frac{3\sqrt3}{8} = \frac{2+3\sqrt3}{8}$$

ដូចនេះ:

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2+\sqrt2}{4}, \quad f(\pi/3) = \frac{2+3\sqrt3}{8}}$$

2. គណនា $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$

យើងមាន:

$$f(x) = \cos^2 x + \sin x.\sin^2 x = \frac12(1+\cos 2x) + \frac12 \sin x(1-\cos 2x)$$

$$= \frac12(1+\cos 2x + \sin x - \sin x\cos 2x)$$

$$= \frac12\left[1+\cos 2x + \sin x - \frac12(\sin 3x + \sin(-x))\right]$$

$$= \frac12\left[1+\cos 2x+\sin x - \frac12\sin 3x + \frac12 \sin x\right]$$

$$f(x) = \frac12 + \frac12\cos 2x + \frac34 \sin x - \frac14 \sin 3x$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2}\left(\frac12+\frac12\cos 2x+\frac34\sin x - \frac14\sin 3x\right)dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac14\sin 2x - \frac34\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}+0-0+0\right) - \left(0+0-\frac34+\frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac23$$

ដូចនេះ:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac23}$$

II-1- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (c)

-ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

-ទិសដៅអថេរភាព:

.ដេរីវេ $y' = \dfrac{2(x-2)(x-1) - (x-2)^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$

.បរមា:

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -4$

$x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 0$

.លីមីត និងអាស៊ីមតូត:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-2)^2}{x-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to1} y = \lim_{x\to1}\frac{(x-2)^2}{x-1} = \pm\infty$$ ⇒ បន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ម្យ៉ាងទៀត អនុគមន៍ $y = f(x)$ អាចសរសេរ

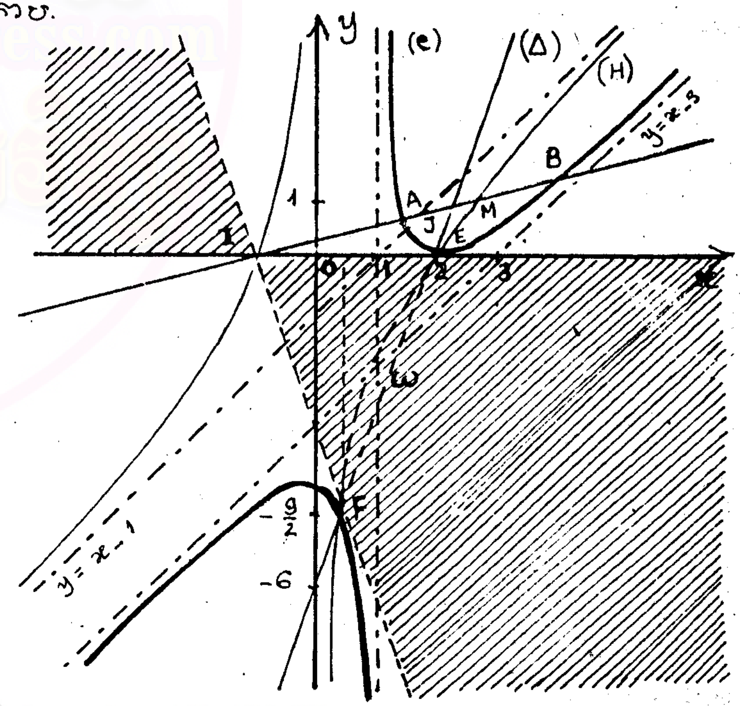
$$y = \frac{(x-2)^2}{x-1} = \frac{[(x-1)-1]^2}{x-1} = \frac{(x-1)^2 - 2(x-1)+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x-3)+1}{x-1} = x-3+\frac{1}{x-1}$$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1} = 0$ ⇒ បន្ទាត់ $y = x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
$y=f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

- ក្រាប



<u>បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយ</u>

បំលាស់ទីអ័ក្សកូអរដោនេ $O(0,0) \to \omega(1,-2)$

តាមរូបមន្តបំលែងអ័ក្ស

$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = -2 + Y \end{cases}$ អនុគមន៍ $y = \frac{(x-2)^2}{x-1}$ ទៅជា

$-2 + Y = \frac{(1+X-2)^2}{1+X-1} = \frac{X^2-2X+1}{X} = \frac{X^2+1}{X} - 2$

$\Rightarrow Y = \frac{X^2+1}{X} = F(X)$

$F(-X) = \frac{X^2+1}{-X} = -\frac{X^2+1}{X} = -F(X) \Rightarrow Y = F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស

ដូច្នេះខ្សែកោង (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $\omega(1,-2)$

2. ក- <u>ចំនួនចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់(D) និងខ្សែកោង (C)</u>

a ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(D), ដូចនេះ (D) មានសមីការ

$y = ax + b$ ដោយ $I(-1,0) \in (D) \Leftrightarrow 0 = -a + b \Rightarrow b = a$

ដូច្នេះសមីការនៃបន្ទាត់ (D) គឺ $y = ax + a$

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង(C) និងបន្ទាត់ (D):

$\frac{(x-2)^2}{x-1} = ax + a \Leftrightarrow (x-2)^2 = (x-1)(ax+1) \quad (x \neq 1)$

$\Leftrightarrow (a-1)x^2 + 4x - a - 4 = 0 \quad (1)$

* បើ $a = 1$ នោះបន្ទាត់(D) មានសមីការ $y = x + 1$ ហើយ (1) ជាសមីការដឺក្រេទីមួយ : $4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

$x = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$

ដូច្នេះចំពោះ $a = 1$: បន្ទាត់(D) កាត់ (C) ត្រង់ចំនុច $(\frac{5}{4}, \frac{9}{4})$

* បើ $a \neq 1$ នោះ (1) មាន $\Delta' = 4 + (a-1)(a+4) = a(a+3)$

សញ្ញានៃ Δ'

a	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
Δ'		+	0		0	+	

- ចំពោះ $a \in]-\infty, 3[\cup]0; +\infty[\setminus \{1\}$: (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ដូច្នេះ (D) កាត់ (C) ត្រង់ពីរចំនុចផ្សេងគ្នា
- ចំពោះ $a \in]-3, 0[$: (1) គ្មានឫស ដូច្នេះ $(D) \cap (C) = \emptyset$
- ចំពោះ $a = 0$, គេបាន $(D): y = 0$ ហើយ (1) មានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 2$ ដូច្នេះ (D) ប៉ះនឹង (C) ត្រង់ $E(2,0)$
- ចំពោះ $a = -3$, គេបាន $(D): y = -3x - 3$ ហើយ (1) មានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 1/2$ ដូច្នេះ (D) ប៉ះនឹង (C) ត្រង់ $F(1/2, -9/2)$

ខ- <u>សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ដែលគូសចេញពីចំនុច I</u>

តាមការពិភាក្សាខាងលើ យើងបាន :

- បន្ទាត់ $(D): y = 0$ ជាបន្ទាត់កាត់តាម I ហើយប៉ះនឹង (C) ត្រង់ $E(2,0)$
- បន្ទាត់ $(D): y = -3x - 3$ ជាបន្ទាត់កាត់តាម I ហើយប៉ះនឹង (C) ត្រង់ $F(1/2, -9/2)$

គ- <u>បកស្រាយការពិភាក្សាខាងលើតាមក្រាភិច</u>

បន្ទាត់(D) ដែលកាត់តាម I ទាំងឡាយណាដែលស្ថិតនៅចន្លោះមុំស្រួចផ្គុំដោយបន្ទាត់ប៉ះ $y = 0$ និង $y = -3x - 3$ គឺជាបន្ទាត់ដែលមិនកាត់ខ្សែកោង (C) មានន័យថាបន្ទាត់(D) ទាំងឡាយដែលស្ថិតនៅក្នុងតំបន់ឆូត ។

3. ក- <u>កូអរដោនេចំនុចកណ្តាល M នៃ [AB]</u>

បន្ទាត់ $(D): y = ax + a$ កាត់(C) ត្រង់ A និង B បើ $a \in]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[\setminus \{1\}$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វ x_A, x_B នៃចំនុច A និង B គឺជាឫសនៃសមីការ (1) អាប់ស៊ីសចំនុចកណ្តាល M នៃ [AB] គឺ

$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{a-1} = \frac{2}{1-a}$

ដោយ $M\in(D): y=ax+a \Rightarrow y_M = ax_M+a = \frac{2a}{1-a}+a = \frac{3a-a^2}{1-a}$

ដូច្នេះកូអរដោនេនៃ M គឺ $\boxed{M\left(\frac{2}{1-a}, \frac{3a-a^2}{1-a}\right)}$

3- កូអរដោនេនៃចំនុច J : យក x_J ជាអាប់ស៊ីសនៃចំនុច J

J ជាចំនុចឆ្លាស់អាម៉ូនិចនៃ I ធៀបនឹង A និង B កាលណា:

$(x_I+x_J)(x_A+x_B) = 2(x_Ix_J+x_Ax_B)$ (2)

ដែល $x_I=-1,\ x_A+x_B=-\frac{4}{a-1}=\frac{4}{1-a},\ x_Ax_B=\frac{a+4}{1-a}$

(2) $\Rightarrow (-1+x_J)\cdot\frac{4}{1-a} = 2\left(-x_J+\frac{a+4}{1-a}\right)$ $(a\neq 1)$

$\iff \frac{2}{1-a}(x_J-1) = \frac{1}{1-a}\left[-x_J(1-a)+a+4\right]$

$\iff (3-a)x_J = a+6 \Rightarrow x_J = \frac{a+6}{3-a}$

J ឆ្លាស់អាម៉ូនិចនឹង I ធៀបនឹង A,B $\Rightarrow J\in(D): y=ax+a$

គេបាន $y_J = ax_J+a = a\cdot\frac{a+6}{3-a}+a = \frac{9a}{3-a}$

ដូច្នេះកូអរដោនេនៃចំនុច J គឺ: $\boxed{J\left(\frac{a+6}{3-a};\frac{9a}{3-a}\right)}$

គ. រកនិងសង់សំនុំ(H)នៃចំនុច M

យើងមាន:

$x_M=\frac{2}{1-a} \iff x_M(1-a)=2 \Rightarrow a=\frac{x_M-2}{x_M}$ $(a\neq 1)$

$\left.\begin{array}{l} y_M = ax_M+a \\ a = \frac{x_M-2}{x_M}\end{array}\right| \Rightarrow y_M = x_M\left(\frac{x_M-2}{x_M}\right)+\frac{x_M-2}{x_M} = \frac{x_M^2-x_M-2}{x_M}$

ដោយកូអរដោនេនៃ M ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងទំនាក់ទំនង $y_M=\frac{x_M^2-x_M-2}{x_M}$ ដូច្នេះ សំនុំនៃចំនុច M គឺជាខ្សែកោង (H) : $y=\frac{x^2-x-2}{x}$

* សិក្សាខ្សែកោង (H):

ដែនកំណត់ : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$

- ដេរីវេ: $y'=\frac{(2x-1)x-(x^2-x-2)}{x^2}=\frac{x^2+2}{x^2}>0, \forall x\in\mathcal{D}_f$

- លីមីត និងអាស៊ីមតូត:

$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-2}{x} = \pm\infty$

$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x-2}{x} = \pm\infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ម្យ៉ាងទៀត $y=\frac{x^2-x-2}{x} = x-1-\frac{2}{x}$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

- តារាងអថេរភាព:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	‖	+	
$y=f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

- ចំនុចប្រសព្វនៃខ្សែកោង(H) និងអ័ក្ស:

$y=0 \iff x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1,\ x=2$

* លីមីតនៃសំនុំចំនុច M :

អត្ថិភាពនៃចំនុច M ជាអត្ថិភាពនៃចំនុច A និង B ដូច្នេះសំនុំនៃចំនុច M គឺជាផ្នែកមួយនៃខ្សែកោង (H) ដែលមិនស្ថិតនៅក្នុងតំបន់ឆូត(ផ្នែកគូសឆូត)។

ឃ- រកនិងសង់សំនុំ(Δ)នៃចំនុច J

យើងមាន: $x_J=\frac{a+6}{3-a} \Rightarrow a=\frac{3x_J-6}{1+x_J}$

J ជាចំនុចឆ្លាស់អាម៉ូនិចនៃ I ធៀបនឹង A,B $\Rightarrow J\in(D): y=ax+a$

គេបាន $\left.\begin{array}{l} y_J = ax_J+a \\ a=\frac{3x_J-6}{1+x_J}\end{array}\right| \Rightarrow y_J = \frac{3x_J-6}{1+x_J}\cdot x_J+\frac{3x_J-6}{1+x_J} = 3(x_J-2)$

ដោយកូអរដោនេនៃ J ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y=3(x_J+2)$ ដូច្នេះសំនុំចំនុច J គឺជាបន្ទាត់ $(\Delta): y=3(x-2)$ ។

* លីមីតនៃសំនុំចំនុច J

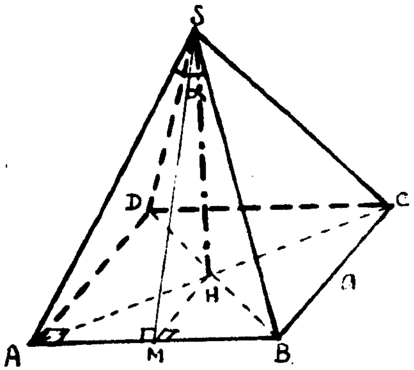
អត្ថិភាពនៃ J អាស្រ័យនឹងអត្ថិភាពនៃ I ដូច្នេះសំនុំនៃចំនុច J គឺជាផ្នែកមួយនៃបន្ទាត់ $(\Delta): y=3(x-2)$ ដែលស្ថិតនៅក្នុងតំបន់ឆូត ។

ង- <u>ចំនុចគួរកត់សំគាល់នៃ(ℓ)ដែលនៅលើ (H) និង (Δ)</u>

តាមក្រាភិច យើងបាន

ចំនុច $E(2,0)$ និង $F(1/2,-9/2)$ នៃខ្សែកោង(ℓ) ជាចំនុចដែលស្ថិតនៅលើ ខ្សែ(H)នៃ M និងខ្សែ(Δ)ផង ព្រោះកូអរដោនេនៃចំនុច E និង F ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការនៃ(H)និង(Δ)ផ្ទៀងផ្ទាត់ខ្លួនឯង)។

IV 1- <u>ក្រលាផ្ទៃសរុបនៃពីរ៉ាមីត:</u>



បើ H ជាផ្ចិតនៃការេ ABCD, គេបាន

$(SH)\perp(ABCD)$ (ព្រោះ SABCD ជាពីរ៉ាមីតចតុម្មុខនិយ័ត)

តាម H គូសបន្ទាត់មួយឲ្យកែង [AB] ត្រង់ M នោះ M ជាចំនុចកណ្តាលនៃ [AB] $\Rightarrow$

$|AM|=|BM|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{a}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}(SH)\perp(ABCD)\\(HM)\perp(AB)\\(AB)\subset(ABCD)\end{array}\right|\Rightarrow (SM)\perp(AB)$$

ត្រីកោណសមបាត ASB មាន $(SM)\perp[AB]$ ត្រង់ចំនុច M ដូចនេះ [SM] ជាកំពស់នៃ ΔASB និង $\widehat{ASM}=\widehat{BSM}=\frac{1}{2}\widehat{ASB}=\alpha$

ΔASH កែងត្រង់ H: $\Rightarrow |SM|=|AM|\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}\alpha$

ក្រលាផ្ទៃសរុបនៃពីរ៉ាមីត SABCD គឺ:

$$S_t=S_b+S_\ell=|AB|^2+4.S_{SAB}=|AB|^2+4.\frac{1}{2}|AB||SM|$$
$$=a^2+2.a.\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}\alpha=a^2+a^2\operatorname{cotg}\alpha$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_t=a^2(1+\operatorname{Cotg}\alpha}$

2.ក- <u>មាឌកោនចារឹកក្រៅពីរ៉ាមីត</u>

កោនបរិវត្តចារឹកក្រៅពីរ៉ាមីតចតុម្មុខនិយ័តមានបាតជារង្វង់ចារឹកក្រៅ

ការេ ABCD $\Rightarrow$ កាំនៃកោនគឺ $R=\frac{1}{2}|AC|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ និងកំពស់គឺ $|SH|$។

ΔSHM កែងត្រង់ H គេបាន:

$$|SH|^2=|SM|^2-|HM|^2=|SM|^2-\left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2=\frac{1}{4}a^2\operatorname{Cotg}^2\alpha-\frac{1}{4}a^2$$

$$\Rightarrow |SH|=\frac{1}{2}a\sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}=h$$

មាឌនៃកោនចារឹកក្រៅពីរ៉ាមីត :

$$V=\frac{1}{3}S_B.h=\frac{1}{3}\pi R^2.h=\frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{2}.\frac{1}{2}a\sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}$$
$$=\frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{\operatorname{Cotg}^2\alpha-1}$$

ដូចនេះ: $\boxed{V=\frac{\pi a^3}{12}\sqrt{\operatorname{Cotg}^2\alpha-1}}$

ខ- <u>កំនត់ α ដើម្បីឲ្យ $V=\frac{\pi a^3}{12}$</u>

យើងមាន :

$$\left.\begin{array}{l}V=\frac{\pi a^3}{12}\\V=\frac{\pi a^3}{12}\sqrt{\operatorname{Cotg}^2\alpha-1}\end{array}\right|\Rightarrow\sqrt{\operatorname{Cotg}^2\alpha-1}=1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Cotg}^2\alpha-1=1\Leftrightarrow\operatorname{Cotg}^2\alpha=2$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Cotg}\alpha=\sqrt{2}\quad(\text{ព្រោះ }\alpha\text{ ជាមុំស្រួច})$$
$$\Rightarrow \alpha=\operatorname{arc}\operatorname{Cotg}\sqrt{2}$$

ដូចនេះ: $V=\frac{\pi a^3}{2}$ កាលណា $\boxed{\alpha=\operatorname{arc}\operatorname{Cotg}\sqrt{2}}$

វិញ្ញាសាទី 3

I. ដោយមិនប្រើតារាងលោការីត , ចូរគណនា

1. $\log_2 5 \cdot \log_5 4$ 2. $\log_3 7 \cdot \log_3 5 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 9 \cdot \log_{25} 3$

II. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-7x+3}{2x-1} & \text{បើ } x \neq \frac{1}{2} \\ a & \text{បើ } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

កំណត់ a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x = \frac{1}{2}$

III. 1. ក. កំណត់មេគុណ b, c, d ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ :

$y = \dfrac{x^2+bx+c}{x^2+dx-2}$ ប៉ះអក្សអាប់ស៊ីសត្រង់គល់ O នៃតំរុយ និងមាន បន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ.

ខ- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (C) ចំពោះតំលៃ b, c, d នេះ

2. បន្ទាត់ (D) មួយមានសមីការ $y = mx$ (m : ប៉ារ៉ាម៉ែត) ; ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ (D) កាត់ (C) ត្រង់ពីរចំនុច P និង Q ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹងចំនុច O ។

3. R និង S ជាចំណោលកែងនៃ P និង Q លើអក្ស $\overrightarrow{Ox}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា រង្វង់អង្កត់ផ្ចិត $[RS]$ កាត់អក្ស $\overrightarrow{Oy}$ ត្រង់ពីរចំនុចនឹង A និង B ដែលគេត្រូវកំណត់ ។

IV. គេឲ្យចតុមុខ $SABC$ ដែលត្រីមុខកំពូល S ជាត្រីមុខកែង ។

1- ឧបមា H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(SH) \perp (ABC)$ – ច្រាសមកវិញតើត្រូវឬខុស ?

2- ស្រាយបញ្ជាក់ថា ABC មិនមែនជាត្រីកោណកែង

3. ឧបមា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស មានជ្រុងស្មើ a និងអរតូសង់ H ។ គណនា $|SH|$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។ បន្លាយ $[HS]$ ឲ្យបាន $|SD| = |HS|$ តើចតុមុខ $ABCD$ មានលក្ខណៈពិសេសអ្វី ?

សំរាយបញ្ជាក់

I 1. គណនា $\log_2 5 \cdot \log_5 4$.

តាមរូបមន្ត : $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ គេបាន :

$\log_2 5 \cdot \log_5 4 = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2$

ដូចេះ: $\boxed{\log_2 5 \cdot \log_5 4 = 2}$

តាមរូបមន្ត $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ គេបាន:

$$\log_3 7 \cdot \log_3 5 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 9 \cdot \log_{25} 3 = \frac{\lg 7}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 9}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 25}$$
$$= \frac{\lg 7}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 5}{\log 3} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 7} \cdot \frac{2\lg 3}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 3}{2\lg 5} = 1$$

ដូចេះ: $\boxed{\log_3 7 \cdot \log_3 5 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 9 \cdot \log_{25} 3 = 1}$

II. កំណត់ a ដើម្បីឲ្យ f មានដេរីវេត្រង់ $x = \frac{1}{2}$

$$f(x = \begin{cases} \dfrac{2x^2-7x+3}{2x-1} & \text{បើ } x \neq \frac{1}{2} \\ a & \text{បើ } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

បើអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ នោះ fជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ ហើយបើ f មិនជាប់ត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ទេ ។

f ជាប់ត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ កាលណា: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f(\frac{1}{2})$ គឺ:

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-7x+3}{2x-1} = f(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow -\frac{5}{2} = a$ (ព្រោះ: $f(\frac{1}{2}) = a$)

ចំពោះ: $a = -\frac{5}{2}$, យើងបាន:

$$f'(\tfrac{1}{2}) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x) - a}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\dfrac{2x^2-7x+3}{2x-1} + \frac{5}{2}}{x - \frac{1}{2}}$$

$f'(\frac{1}{2}) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)^2}{(2x-1)^2} = 1$ សមភាពនេះបញ្ជាក់ថា f មានដេរីវេ ត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ ។

ដូច្នេះតំលៃ a ដើម្បីឲ្យ f មានដេរីវេត្រង់ $x=\frac{1}{2}$ គឺ $\boxed{a=-\frac{5}{2}}$

III. $y=\frac{x^2+bx+c}{x^2+dx-2}=f(x)$

1-ក. <u>កំនត់មេគុណ b,c,d</u>

តាមសម្មតិកម្មយើងមាន :

$x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ បើវាជាឫសនៃសមីការ: $x^2+dx-2=0$

គេបាន $x=1 \Rightarrow 1+d-2=0 \Rightarrow d=1$

ខ្សែកោង(c) ប៉ះអ័ក្ស $\vec{Ox}$ ត្រង់ 0 $\Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$

$f(0)=0 \Leftrightarrow -\frac{c}{2}=0 \Rightarrow c=0$

ចំពោះតំលៃ $c=0, d=1$ អនុគមន៍ទៅជា $y=f(x)=\frac{x^2+bx}{x^2+x-2}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+b)(x^2+x-2)-(2x+1)(x^2+bx)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{(1-b)x^2-4x-2b}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \frac{(1-b)0-4.0-2b}{4}=0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2}=0 \Rightarrow b=0$$

ដូច្នេះ $\boxed{b=0;\ c=0,\ d=1}$

ចំពោះតំលៃ b,c,d នេះអនុគមន៍ទៅជា $y=f(x)=\frac{x^2}{x^2+x-2}$

2-សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង(c) តាងអនុគមន៍ :

- ដែនកំនត់ $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$
- ទិសដៅអថេរភាព :

. ដេរីវេ : $y'=\frac{x^2-4x}{(x^2+x-2)^2}$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0,\ x=4$

. បរមា :

$x=0 \Rightarrow y=f(0)=0$

$x=4 \Rightarrow y=f(4)=8/9$

. លីមីតនិងអាស៊ីមតូត :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+x-2}=1 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x\to-2} y=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2}{x^2+x-2}=\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{x^2+x-2}=\pm\infty$

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ $x=-2, x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

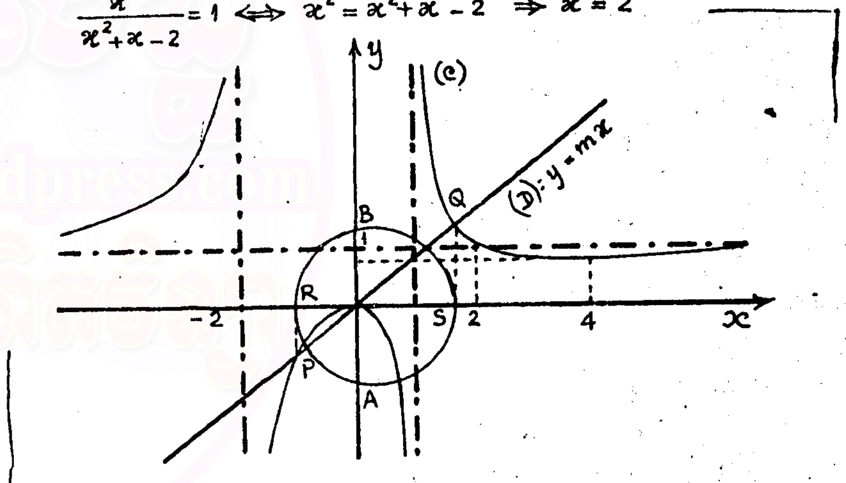
. តារាងអថេរភាព.

x	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$		$+$	
$y=f(x)$	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$8/9$	↗	1

- ក្រាប

. ចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអាស៊ីមតូតដេក :

$\frac{x^2}{x^2+x-2}=1 \Leftrightarrow x^2=x^2+x-2 \Rightarrow x=2$



2. <u>ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(D): y=mx$ កាត់ (c) ត្រង់ P និង Q ក្រៅពីចំនុច O</u>

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (D):

$\frac{x^2}{x^2+x-2}=mx \Leftrightarrow x^2=mx(x^2+x-2) \quad (x\neq-2, x\neq1)$

$\Leftrightarrow x[mx^2+(m-1)x-2m]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \text{(អាប់ស៊ីសចំនុច O)} \\ mx^2+(m-1)x-2m=0 & (1) \end{array}\right.$

សមីការ (1) មាន:

$\Delta = (m-1)^2 + 8m^2 > 0, \forall m \Rightarrow$ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជានិច្ច

ដូច្នេះគ្រប់ពីចំនុច O បន្ទាត់ (D) កាត់ (C) ត្រង់ពីរចំនុច P និង Q ផ្សេងគ្នាជានិច្ច ។

3. ស្រាយបញ្ជាក់ថារង្វង់អង្កត់ផ្ចិត [RS] កាត់ $\vec{Oy}$ ត្រង់ពីរចំនុចនឹង A, B

R និង S ជាចំណោលកែងនៃ P, Q លើអ័ក្ស $\vec{Ox}$, ដូចនេះ អាប់ស៊ីសនៃ R, S គឺជាអាប់ស៊ីសនៃ P និង Q ដែលជាឫសនៃសមីការ (1) , គេបាន

$x_R \cdot x_S = \overline{OR}\cdot\overline{OS} = \frac{-2m}{m} = -2$

រង្វង់អង្កត់ផ្ចិត [RS] កាត់ $\vec{Oy}$ ត្រង់ A និង B, ដូចនេះ តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងរង្វង់ គេបាន :

$\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \overline{OR}\cdot\overline{OS} = -2$ (2)

តែ $-\overline{OA} = \overline{OB}$ (ព្រោះផ្ចិតរង្វង់នៅលើ $\vec{Ox}$) $\Rightarrow \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$

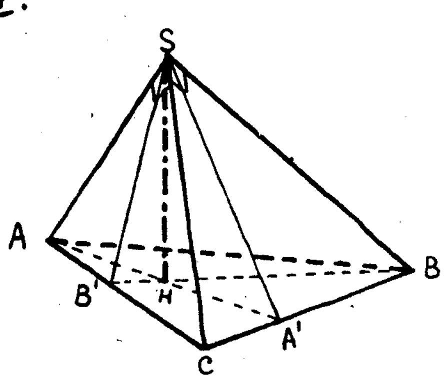
(2) $\Rightarrow \overline{OA}\cdot(-\overline{OA}) = -2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 2 \Rightarrow \overline{OB} = \sqrt{2}$

$\overline{OB} = \sqrt{2} \Rightarrow \overline{OA} = -\sqrt{2}$

ដូច្នេះរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត [RS] កាត់អ័ក្ស $\vec{Oy}$ ត្រង់ពីរចំនុចនឹង A និង B ដែល

$$\boxed{\overline{OA} = -\sqrt{2},\ \overline{OB} = \sqrt{2}}$$

IV.



1- ស្រាយបញ្ជាក់ថា (SH)⊥(ABC)

H ជាអ័រតូសង់នៃ Δ ABC ⇒ (AH)⊥(BC) ត្រង់ A' និង (BH)⊥(AC) ត្រង់ B'

$\left.\begin{array}{l}(SA)\perp(SB)\\(SA)\perp(SC)\end{array}\right| \Rightarrow (SA)\perp(SBC)$

$\left.\begin{array}{l}(SA)\perp(SBC)\\(BC)\subset(SBC)\end{array}\right| \Rightarrow (SA)\perp(BC)$

$\left.\begin{array}{l}(BC)\perp(SA)\\(BC)\perp(AH)\end{array}\right| \Rightarrow (BC)\perp(SAH)$

$\left.\begin{array}{l}(BC)\perp(SAH)\\(SH)\subset(SAH)\end{array}\right| \Rightarrow (SH)\perp(BC)$ (1)

ដូចគ្នាដែរ:

$\left.\begin{array}{l}(SB)\perp(SAC)\\(AC)\subset(SAC)\end{array}\right| \Rightarrow (SB)\perp(AC)$ ឬ $(AC)\perp(SB)$

$\left.\begin{array}{l}(AC)\perp(SB)\\(AC)\perp(BH)\end{array}\right| \Rightarrow (AC)\perp(SBH)$

$\left.\begin{array}{l}(AC)\perp(SBH)\\(SH)\subset(SBH)\end{array}\right| \Rightarrow (SH)\perp(AC)$ (2)

(1) និង (2) គេបាន $(SH)\perp(ABC)$

ស្រាយបញ្ច្រាសបើ (SH)⊥(ABC) បញ្ជាក់ថា H ជាអ័រតូសង់នៃ Δ ABC

$\left.\begin{array}{l}(SH)\perp(ABC)\\(AC),(BC)\subset(ABC)\end{array}\right| \Rightarrow (SH)\perp(AC), (SH)\perp(BC)$

ដោយ SABC ជាត្រីមុខកែងត្រង់កំពូល S គេបាន: (SA)⊥(SBC) និង (SB)⊥(SAC) ។

$\left.\begin{array}{l}(SA)\perp(SBC)\\(BC)\subset(SBC)\end{array}\right| \Rightarrow (SA)\perp(BC)$ ឬ $(BC)\perp(SA)$

$\left.\begin{array}{l}(BC)\perp(SA)\\(BC)\perp(SH)\end{array}\right| \Rightarrow (BC)\perp(SAH) \Rightarrow (BC)\perp(AH)$ ត្រង់ A' (3)

$\left.\begin{array}{l}(SB)\perp(SAC)\\(AC)\subset(SAC)\end{array}\right| \Rightarrow (SB)\perp(AC)$ ឬ $(AC)\perp(SB)$

$\left.\begin{array}{l}(AC)\perp(SB)\\(AC)\perp(SH)\end{array}\right| \Rightarrow (AC)\perp(SBH) \Rightarrow (AC)\perp(BH)$ ត្រង់ B' (4)

(3) និង (4) បញ្ជាក់ថា H ជាអ័រតូសង់នៃ Δ ABC ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ABC មិនមែនជាត្រីកោណកែង

ឬបានជា ΔABC កែងត្រង់ C, នោះ $(BC) \perp (AC)$

តាមសម្រាយខាងលើ, គេបាន:

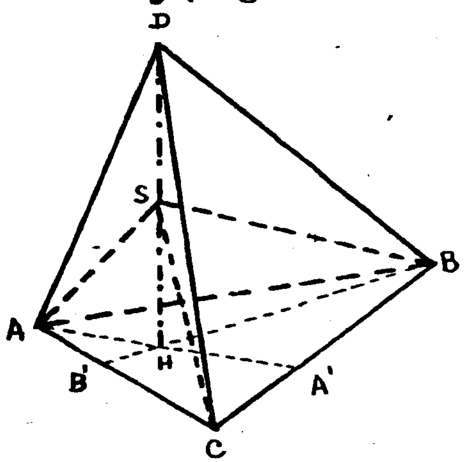
$$\left.\begin{array}{l}(SA) \perp (SBC)\\ (BC) \subset (SBC)\end{array}\right| \Rightarrow (SA) \perp (BC) \text{ ឬ } (BC) \perp (SA)$$

$$\left.\begin{array}{l}(BC) \perp (AC)\\ (BC) \perp (SA)\end{array}\right| \Rightarrow (BC) \perp (SAC)$$

$$\left.\begin{array}{l}(BC) \perp (SAC)\\ (SC) \subset (SAC)\end{array}\right| \Rightarrow (BC) \perp (SC) \Rightarrow \widehat{SCB} = 90^\circ$$

ត្រីកោណ SBC មានមុំកែងពីរ $\widehat{SBC} = \widehat{BSC} = 90^\circ$ ជាករណីមិនអាចមាន

ដូច្នេះ ត្រីកោណ ABC មិនអាចជាត្រីកោណកែងកើតទេ ។



3- គណនា $|SH|$

ΔABC សម័ង្សមានជ្រុងស្មើ a ដូចនេះ ចំណុច H គឺជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃ ΔABC ។ គេបាន:

$$|AH| = \frac{2}{3}|AA'| = \frac{2}{3}|BC|\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

ត្រីកោណកែង SAB និង SBC មាន

$$\left.\begin{array}{l}|AB| = |BC|\\ [SB]: \text{ រួម}\end{array}\right| \Rightarrow \Delta SAB \cong \Delta SCB$$

ទំនាក់: $|SA| = |SC|$

ត្រីកោណកែង ASB មាន $|SA| = |SC|$ ជា ត្រីកោណកែងសមបាត,

ដូចនេះ: $2|SA|^2 = |AC|^2 \Rightarrow |SA|^2 = \frac{1}{2}|AC|^2 = \frac{1}{2}a^2$

ΔSHA កែងត្រង់ $H \Rightarrow |SH|^2 = |SA|^2 - |AH|^2 = \frac{1}{2}a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{6}$

$$\Rightarrow \boxed{|SH| = \frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

លក្ខណៈពិសេសនៃចតុមុខ $ABCD$ -

ពីរ៉ាមីត $SABC$ មាន ΔABC សម័ង្ស និង $|SA| = |SB| = |SC|$ ជា ពីរ៉ាមីតត្រីមុខនិយ័ត ដូច្នេះពីរ៉ាមីត $DABC$ មានបាតជា ΔABC ដែរ ពីរ៉ាមីត $SABC$ និងមានកំពស់ជាបន្លាយកំពស់នៃពីរ៉ាមីត $SABC$

ដូចនេះ $DABC$ ជាពីរ៉ាមីតត្រីមុខនិយ័តដែរ ។

តាមសម្មតិកម្ម $|DH| = 2|SH| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

ΔDHA កែងត្រង់ H គេបាន:

$$|AD|^2 = |DH|^2 + |AH|^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2$$

$\Rightarrow |AD| = a$

ចតុមុខ $ABCD$ មានជ្រុងទាំងអស់ស្មើ a ដូច្នេះវាជាចតុមុខនិយ័ត ។

វិញ្ញាសាទី 4

I. ដោះស្រាយសមីការ:

1/- $16^{\sin x} = \sqrt[\cos x]{4}$ 2/- $\sqrt{3}\sin a^x + \cos a^x = \sqrt{2}$ (a: ប៉ារ៉ាម៉ែត $a > 0$, $a \neq 1$)

II- គណនាលីមីត:

1)- $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ 2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2 - \cos x}{tg^2 x}$

III. គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{(x^2-1)\cos\theta + x\cos\theta}{x - \cos\theta}$ θ ជាប៉ារ៉ាម៉ែតថេរ $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ។

1. កំណត់ θ ដើម្បីឲ្យខ្សែកោងមានអាស៊ីមតូតទ្រេតស្របនឹងបន្ទាត់

$(D): y \quad\quad +2$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (C) ចំពោះ θ ដែលរកឃើញនេះ

2- (Δ) ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាម $A(0,2)$ មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង K ។ កំនត់ k ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ (Δ) កាត់ខ្សែកោង (C) ត្រង់ពីរចំនុចផ្សេងគ្នានៅលើមែកពីរផ្សេងគ្នា

3- គណនាក្រលាផ្ទៃ S_λ ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C), អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x = 2, x = \lambda \ (\lambda > 2)$ ។ គណនា $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S_\lambda$

4- ពីខ្សែកោង (C), ចូរទាញបង្ហាញខ្សែកោង $(C_1): y = \frac{x^2+|x|-1}{|x|-1}$ រួច កំនត់ m ដើម្បីឲ្យសមីការ : $x^2-(m-1)|x|+m-1 = 0$ មានឬសពីរ នៅក្នុងចន្លោះ $]-1,1[$ ។

IV. គេឲ្យពីរ៉ាមីតត្រីកោណនិយ័ត SABC មួយមានជ្រុងបាតស្មើនឹង a, មុំខាងនៃមុខខាងមានរង្វាស់ស្មើនឹង α ។

1- គណនាក្រលាផ្ទៃខាងនៃកោនចារឹកក្នុងពីរ៉ាមីតនេះ

2- ស្រាយបញ្ជាក់ថា កំពស់នៃពីរ៉ាមីត SABC ស្មើនឹង :

$$\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha} \cdot \sqrt{\sin(\alpha+30^\circ) \cdot \sin(\alpha-30^\circ)}$$

សំរាយបញ្ជាក់

I. 1- ដោះស្រាយសមីការ : $16^{\sin x} = \sqrt[\cos x]{4}$

សមីការអាចសរសេរ :

$$(4^2)^{\sin x} = 4^{1/\cos x} \Leftrightarrow 2\sin x = \frac{1}{\cos x} \quad (\cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \pi/2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ដូចនេះឬសនៃសមីការគឺ $\boxed{x = \pi/4 + k\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$

2- ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{3}\sin a^x + \cos a^x = \sqrt{2}$ $(a>0, a\neq 1)$

យើងមាន :

$$r = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

ដូចនេះ គេបាន

$$\sqrt{3}\sin a^x + \cos a^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2.\cos(a^x - \pi/3) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(a^x - \pi/3) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \pi/4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^x - \pi/3 = \pi/4 + 2k\pi \\ a^x - \pi/3 = -\pi/4 + 2k'\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a^x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}_+) \\ a^x = \frac{\pi}{12} + 2k'\pi & (k' \in \mathbb{Z}_+) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_a\left(\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right) \\ x = \log_a\left(\frac{\pi}{12} + 2k'\pi\right) \end{array}\right.$$

ដូចនេះឬសនៃសមីការគឺ :

$$\boxed{x = \log_a\left(\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right);\ x = \log_a\left(\frac{\pi}{12} + 2k'\pi\right)} \ (k, k' \in \mathbb{Z}_+)$$

II 1. គណនា $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x^2-a^2})}{x^2-a^2}+\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x+a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\sqrt{x^2-a^2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a)}+\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a)}+\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}=0+\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

ដូចនេះ:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}}$$

2. គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-\cos x}{tg^2x}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-\cos x}{tg^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tg^2x}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{tg^2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2x}{\sin^2x}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{tg^2x}\quad\left(\text{ព្រោះ: } tg^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2x}{(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})^2}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{tgx}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2x}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{tgx}\right)^2=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-\cos x}{tg^2x}}$$

III $y=f(x)=\dfrac{(x^2-1)\cos\theta+x\cos\theta}{x-\cos\theta}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$

1. កំនត់ θ ដើម្បីឲ្យអាស៊ីមតូតទ្រេតស្របនឹងបន្ទាត់ $(D): y=x+2$

មេគុណប្រាប់ទិសអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) កំនត់ដោយ

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^2-1)\cos\theta+x\cos\theta}{x(x-\cos\theta)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\cos\theta+x\cos\theta-\cos\theta}{x^2-x\cos\theta}$$

$a=\cos\theta$

អាស៊ីមតូតទ្រេតស្របនឹងបន្ទាត់ $(D): y=x+2$ កាលណាមេគុណប្រាប់ទិសស្មើគ្នា គឺ $a=1\Leftrightarrow\cos\theta=1\Rightarrow\theta=0$

ដូចនេះ: $\boxed{\theta=0}$

ចំពោះ: $\theta=0$ នោះ: $\cos\theta=1\Rightarrow y=f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

<u>សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង(C) ចំពោះតំលៃ θ នេះ:</u>

_ដែនកំនត់ : $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

_ទិសដៅអថេរភាព:

. ដេរីវេ $y'=\dfrac{(2x+1)(x-1)-x^2-x+1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=2$

. បរមា :

$x=0\Rightarrow y=f(0)=1$

$x=2\Rightarrow y=f(2)=5$

. លីមីត និងអាស៊ីមតូត.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x-1}=\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-1}{x-1}=\pm\infty\Rightarrow$ បន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ.

ម្យ៉ាងទៀត $y=f(x)$ អាចសរសេរ :

$y=\dfrac{(x-1)(x+2)+1}{x-1}=x+2+\dfrac{1}{x-1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0\Rightarrow$ បន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

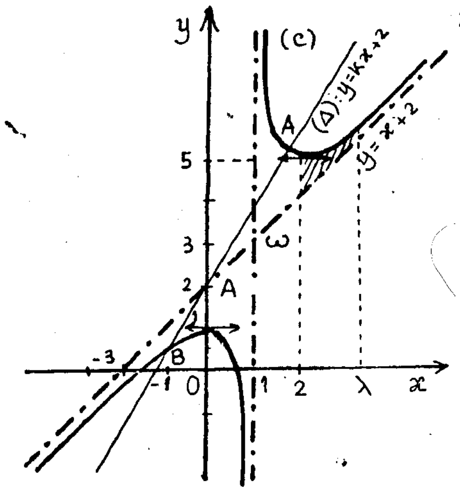
. តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$y=f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

- ក្រាប.

- ចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស :

$y=0 \Longleftrightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0,6;\quad x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1,6$



2. កំនត់ k ដើម្បីឲ្យ (Δ) កាត់ (c) ពីរចំនុចនៅលើមែកពីរផ្សេងគ្នា:

(Δ) មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ k, គេបាន:

$(\Delta): y = kx+b$

ដែល $A(0,2)\in(\Delta) \Longleftrightarrow 2=k.0+b \Rightarrow b=2$

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (Δ) និងខ្សែកោង (c) :

$\frac{x^2+x-1}{x-1}=kx+2 \quad (x\neq 1)$

$\Longleftrightarrow x^2+x-1=(x-1)(kx+2)$

$\Longleftrightarrow (k-1)x^2+(1-k)x-1=0 \quad (1)$

បន្ទាត់ (Δ) កាត់ខ្សែកោង (c) ត្រង់ពីរចំនុច A និង B នៅលើមែកពីរផ្សេងគ្នានៃខ្សែកោង (c) កាលណាសមីការ (1) មានឬសពីរផ្សេងគ្នាផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1<1<x_2$ មានន័យថា $ag(1)<0$ ដែល

$g(x)=(k-1)x^2+(1-k)x-2$ ។

$ag(1)<0 \Longleftrightarrow (k-1)[(k-1)+(1-k)-1]<0 \Longleftrightarrow -(k-1)<0$

$\Rightarrow k>1$

ដូចនេះ (Δ) កាត់ (c) ពីរចំនុចនៅលើមែកពីរផ្សេងគ្នាបើ $\boxed{k\in]1,+\infty[}$

3. គណនាក្រលាផ្ទៃ S_λ, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S_\lambda$

ក្នុងចន្លោះ $[2,\lambda]$ ខ្សែកោង (c) ស្ថិតនៅលើអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x+2$

ដូច្នេះក្រលាផ្ទៃ S_λ ដែលនៅចន្លោះខ្សែកោង (c), អាស៊ីមតូតទ្រេត, បន្ទាត់ $x=2$, $x=\lambda$ $(\lambda>2)$ កំនត់ដោយ :

$S_\lambda=\int_2^\lambda\left[\left(\frac{x^2+x-1}{x-1}\right)-(x+2)\right]dx=\int_2^\lambda\frac{dx}{x-1}=\left[\ln(x-1)\right]_2^\lambda=\ln(\lambda-1)-\ln 1$

$=\ln(\lambda-1)$ ឯកតាក្រលាផ្ទៃ (ព្រោះ $\ln 1=0$)

ដូចនេះ: $\boxed{S_\lambda=\ln(\lambda-1)\text{ ឯកតាក្រលាផ្ទៃ}}$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln(\lambda-1)=+\infty$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S_\lambda=+\infty}$

4. សង់ក្រាបខ្សែកោង (c_1): $y=\frac{x^2+|x|-1}{|x|-1}$

យើងមាន :

$$y=\frac{x^2+|x|-1}{|x|-1}=\begin{cases}\frac{x^2+x-1}{x-1} & \text{បើ } x\geq 0 \quad (I)\\ \frac{x^2-x-1}{-x-1} & \text{បើ } x<0 \quad (II)\end{cases}$$

ដូច្នេះខ្សែកោង (c_1) មានពីរផ្នែកគឺ:

(I) ជាផ្នែកនៃខ្សែកោង (c) ដែលត្រូវនឹង $x\geq 0$

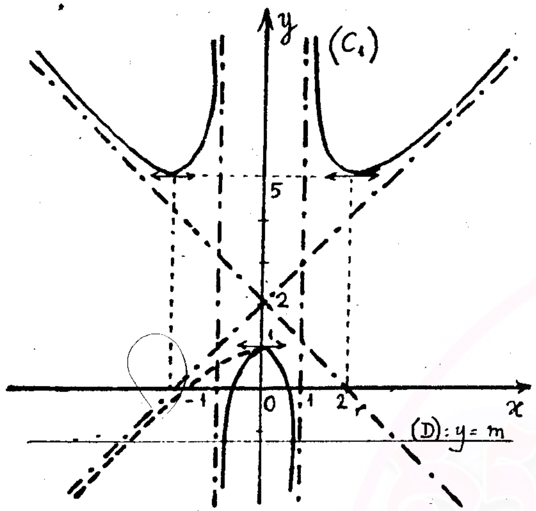
(II) ជាផ្នែកឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $\vec{Oy}$ នៃផ្នែកទី(I). (រូបខាងក្រោយ)

កំនត់ m ដើម្បីឲ្យ: $x^2-(m-1)|x|+m-1=0$ (2) មានឬសពីរក្នុងចន្លោះ $]-1,1[$:

សមីការ (2) អាចសរសេរ :

$x^2-m|x|+|x|+m-1=0 \Longleftrightarrow x^2+|x|-1=(|x|-1)m$

$\Rightarrow \frac{x^2+|x|-1}{|x|-1}=m$ នេះជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង



ខ្សែកោង $(C_1): y = f(|x|)$ និងបន្ទាត់ $(D): y = m$ ។ អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (D) និង (C_1) គឺជាឫសនៃសមីការ (2), តាមក្រាភិច (D) កាត់ (C_1) ត្រង់ពីរចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស x_1, x_2 នៅក្នុងចន្លោះ $]-1,1[$ កាលណា $m<1$ ។ ដូចនេះ សមីការ (2) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា

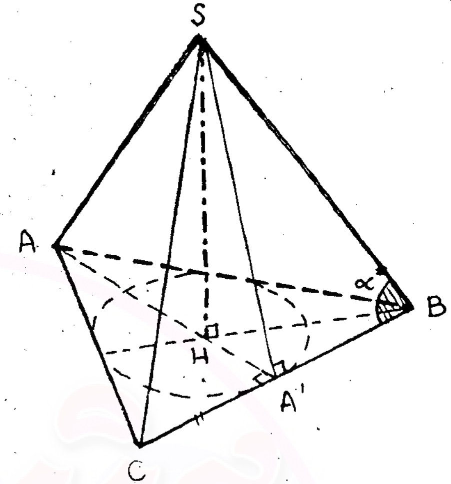
$-1<x_1<x_2<1$ កាលណា $\boxed{m<1}$

IV. 1- <u>ក្រលាផ្ទៃខាងនៃកោនចារឹកក្នុងពីរ៉ាមីត SABC</u>

SABC ជាពីរ៉ាមីតត្រីកោណនិយ័ត ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្សដែលមានជ្រុងស្មើ a, មុខខាងទាំងបីនៃពីរ៉ាមីតជាត្រីកោណសមបាតប៉ុនគ្នា ដែលមានមុំបាត $\widehat{SBC}=\alpha$, ជើងកំពស់ H នៃពីរ៉ាមីតជាអរតូសង់, ទីប្រជុំទម្ងន់និងជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC ។ យក A' ជាជើងកំពស់គូសពី A នៃ ΔABC គេបាន: A' ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[BC]$

$|A'B|=\frac{1}{2}|BC|=\frac{a}{2}, |A'H|=\frac{1}{3}|AA'|=\frac{1}{3}\cdot\frac{|BC|\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

និង $(SA') \perp (BC)$ (ព្រោះ: $[SA']$ ជាកំពស់ត្រីកោណសមបាត SBC)



ចំពោះត្រីកោណកែង $SA'B$ គេបាន:

$tg\alpha=\frac{|SA'|}{|A'B|} \Rightarrow |SA'|=|A'B|\,tg\alpha$

$|SA'|=\frac{a}{2}\,tg\alpha$

ក្រលាផ្ទៃខាងនៃកោនគឺឲ្យដោយ

$S_\ell=\pi R\ell=\pi.|A'H|.|SA'|$

$=\pi.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a}{2}tg\alpha=\frac{\sqrt{3}\pi a^2 tg\alpha}{12}$

ដូចនេះ:

$$\boxed{S_\ell=\frac{\pi a^2\sqrt{3}\,tg\alpha}{12}}$$

2. <u>កំពស់នៃពីរ៉ាមីត SABC ស្មើនឹង $\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ).\sin(\alpha-30^\circ)}$</u>

$[SH]$ ជាកំពស់នៃពីរ៉ាមីត, គេបាន $\Delta SHA'$ កែងត្រង់ H

$$\Rightarrow |SH|^2=|SA'|^2-|A'H|^2=\frac{a^2}{4}tg^2\alpha-\frac{3a^2}{36}=\frac{a^2\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha}-\frac{a^2}{12}$$

$$=\frac{3a^2\sin^2\alpha-a^2\cos^2\alpha}{12\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{a^2}{3\cos^2\alpha}\left[\frac{3\sin^2\alpha}{4}-\frac{\cos^2\alpha}{4}\right]=\frac{a^2}{3\cos^2\alpha}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha\right)$$

$$=\frac{a^2}{3\cos^2\alpha}(\cos 30^\circ\sin\alpha+\sin 30^\circ\cos\alpha)(\cos 30^\circ\sin\alpha-\sin 30^\circ\cos\alpha)$$

$$=\frac{a^2}{3\cos^2\alpha}.\sin(\alpha+30^\circ).\sin(\alpha-30^\circ)$$

$$\Rightarrow |SH|=\sqrt{\frac{a^2}{3\cos^2\alpha}.\sin(\alpha+30^\circ).\sin(\alpha-30^\circ)}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ).\sin(\alpha-30^\circ)}$$

ដូចនេះ: កំពស់នៃពីរ៉ាមីត SABC គឺ:

$$\boxed{|SH|=\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}.\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ).\sin(\alpha-30^\circ)}}$$

វិញ្ញាសាទី 5

I.1. គណនា $\sin 70°.\sin 50°.\sin 10°$

2. គណនា $tg\alpha$ ជាអនុគមន៍នៃ $tg2\alpha$ រួចគណនា $tg\,112°30'$

3. គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយមានដេរីវេត្រង់ចំនុច $x=a$, ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

II. គេមានប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases}(m-1)^2x-(2m-1)y=m^2-4m+2 & (1)\\ m(m-1)x+(2m+1)^2y=7m^2-7m+2 & (2)\end{cases}\quad (m:\text{ប៉ារ៉ាម៉ែត})$$

1- ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាប្រព័ន្ធសមីការនេះទៅតាមតំលៃ m

2- តាង (D_1) និង (D_2) ជាបន្ទាត់តាងសមីការ (1) និងសមីការ (2) ចំពោះតំលៃមួយនៃ m ។ ដាច់ទៅបន្ទាត់ (D_1) និង (D_2) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ M ។ កំនត់ទំនាក់ទំនងគ្មាន m រវាងកូអរដោនេ x និង y នៃចំនុច M ។ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (C) តាងសំនុំនៃចំនុច M កាលណា m ប្រែប្រួល

3- បង្ហាញថាកាលណា m ប្រែប្រួល បន្ទាត់ (D_1) កាត់តាមចំនុចនឹង A មួយ ហើយបន្ទាត់ (D_2) កាត់តាមចំនុចនឹង B មួយដែលគេត្រូវកំនត់ ។ សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (AB) ។

4- បង្ហាញថាមានបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ពីរដែលស្របនឹងបន្ទាត់ (AB) ។ កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះនេះ ។

III. គេឲ្យស្វ៊ែរអង្កត់ផ្ចិត $|PP'|=2R$ ។ ប្លង់ (π) មួយកែងនឹង $[PP']$ ត្រង់ H ប្រសព្វនឹងស្វ៊ែរតាមរង្វង់ (C) មួយ ។ $ABCD$ ជាការេចារឹកក្នុងរង្វង់ (C) ។ គេឲ្យ $|PH|=x$ ។

1- គណនាកាំនៃរង្វង់ (C), ជ្រុង $[AB]$ និងអង្កត់ $|PA|$

2- គណនាមាឌនៃសូលីតដែលកើតឡើងដោយពីរ៉ាមីត $PABCD$ និង $P'ABCD$ ។ គណនា x ដើម្បីឲ្យមាឌនេះអតិបរមា

សំរាយបញ្ជាក់

I.1. គណនា $\sin 70°.\sin 50°.\sin 10°$

តាមរូបមន្ត $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ គេបាន:

$\sin 70°=\sin(90°-20°)=\cos 20°$

$\sin 50°=\sin(90°-40°)=\cos 40°$

$\sin 10°=\sin(90°-80°)=\cos 80°$ ដូចនេះ:

$A=\sin 70°.\sin 50°.\sin 10°=\cos 20°.\cos 40°.\cos 80°$ (1)

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមភាព (1) នឹង $8\sin 20°$ គេបាន:

$8A\sin 20°=4.(2\sin 20°.\cos 20°).\cos 40°.\cos 80°$

$=4\sin 40°.\cos 40°.\cos 80°=2(2\sin 40°.\cos 40°)\cos 80°$

$=2\sin 80°.\cos 80°=\sin 160°=\sin(180°-20°)$

$=\sin 20°$

$\Rightarrow A=\dfrac{\sin 20°}{8\sin 20°}=\dfrac{1}{8}$

ដូចនេះ: $\boxed{\sin 70°.\sin 50°.\sin 10°=1/8}$

2. គណនា $tg\alpha$ ជាអនុគមន៍នៃ $tg2\alpha$ រួចគណនា $tg\,112°30'$

យើងមាន

$tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\Longleftrightarrow tg2\alpha.tg^2\alpha+2tg\alpha-tg2\alpha=0$

សមីការនេះមាន:

$\Delta'=1^2+tg^22\alpha\quad(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})$

$\Rightarrow tg\alpha=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+tg^22\alpha}}{tg2\alpha}$

ដូចនេះ: $\boxed{tg\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+tg^22\alpha}}{tg2\alpha}}$

$$\Rightarrow tg\,112°30' = \frac{-1\pm\sqrt{1+tg^2 225°}}{tg\,225°} = \frac{-1\pm\sqrt{1+tg^2(180°+45°)}}{tg\,(180°+45°)}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{1+tg^2 45°}}{tg\,45°} = -1\pm\sqrt{2}$$ (ព្រោះ: $tg\,45° = 1$)

តែ $112°30' \in \,]90°, 180°[$ (ស្ថិតក្នុងមុំកាដ្រង់ទី II) $\Rightarrow tg\,112°30' < 0$

ដូចនេះ: $\boxed{tg\,112°30' = -1-\sqrt{2}}$

3- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to a}\frac{x f(a) - a f(x)}{x-a} = f(a) - a f'(a)$

អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x = a$, គេបាន $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

យើងមាន:

$$\frac{x f(a) - a f(x)}{x-a} = \frac{x f(a) - a f(a) - a f(x) + a f(a)}{x-a}$$

$$= \frac{(x-a)f(a) - a[f(x)-f(a)]}{x-a} = f(a) - a\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{x f(a)-a f(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} f(a) - \lim_{x\to a} a\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} f(a) - a\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f(a) - a f'(a)$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{x f(a)-a f(x)}{x-a} = f(a) - a f'(a)}$

II 1. ដោះស្រាយនិងពិភាក្សា

$$\begin{cases}(m-1)^2 x - (2m-1)y = m^2-4m+2 & (1)\\ m(m-1)x + (2m-1)^2 y = 7m^2-7m+2 & (2)\end{cases}$$

យើងមាន:

$D = ab' - a'b = (m-1)^2(2m-1)^2 + m(m-1)(2m-1)$

$= (m-1)(2m-1)(2m^2-2m+1)$

$Dx = b'c - bc' = (2m-1)^2(m^2-4m+2) + (2m-1)(7m^2-7m+2)$

$= m(2m-1)(2m^2-2m+1)$

$Dy = ac' - a'c = (m-1)^2(7m^2-7m+2) - m(m-1)(m^2-4m+2)$

$= (m-1)(6m^3-10m^2+7m-2) = (m-1)(3m-2)(2m^2-2m+1)$

* ពិភាក្សា:

- បើ $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ និង $m \neq \frac{1}{2}$: ប្រព័ន្ធមានគូចំលើយតែមួយគត់:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{m(2m-1)(2m^2-2m+1)}{(m-1)(2m-1)(2m^2-2m+1)} = \frac{m}{m-1}$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{(m-1)(3m-2)(2m^2-2m+1)}{(m-1)(2m-1)(2m^2-2m+1)} = \frac{3m-2}{2m-1}$$

- បើ $D = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ឬ $m = \frac{1}{2}$

ក) ករណី $m = 1$: ប្រព័ន្ធទៅជា:

$$\begin{cases}-y = -1\\ y = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 1\\ y = 2\end{cases}$$ ជាប្រព័ន្ធមិនអាច (គ្មានចំលើយ)

ខ) ករណី $m = \frac{1}{2}$: ប្រព័ន្ធទៅជា:

$$\begin{cases}\frac{1}{4}x = \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}x = \frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\ x = -1\end{cases}$$ ជាប្រព័ន្ធមិនអាច

* សន្និដ្ឋាន:

- បើ $m \neq 1$ និង $m = \frac{1}{2}$: ប្រព័ន្ធមានគូចំលើយតែមួយគត់

$$\boxed{\left(x = \frac{m}{m-1};\ y = \frac{3m-2}{2m-1}\right)}$$

- បើ $m = 1$ ឬ $m = \frac{1}{2}$: ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចំលើយ.

2- រកទំនាក់ទំនងមិនអាស្រ័យនឹង m រវាងកូអរដោនេ x, y នៃចំនុចប្រសព្វ M.

តាមសម្មតិកម្ម $(D_1)\cap(D_2) = \{M\}$ ដែល:

$(D_1): (m-1)^2 x - (2m-1)y = m^2-4m+2 \quad (1)$

$(D_2): m(m-1)x + (2m-1)^2 y = 7m^2-7m+2 \quad (2)$

M ជាចំនុចប្រសព្វនៃ(D_1)និង(D_2) ដូច្នេះកូអរដោនេនៃចំនុច M គឺជាគូចំ-លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។ ដូចនេះ: $M\left(x_M = \frac{m}{m-1} ; y_M = \frac{3m-2}{2m-1}\right)$

ដោយ $x_M = \frac{m}{m-1} \Rightarrow (m-1)x_M = m \Rightarrow m = \frac{x_M}{x_M - 1}$

$$y_M = \frac{3m-2}{2m-1} \Rightarrow (2m-1)y_M = 3m-2 \Rightarrow m = \frac{y_M - 2}{2y_M - 3}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{x_M}{x_M-1} \\ m = \frac{y_M-2}{2y_M-3} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{y_M-2}{2y_M-3} = \frac{x_M}{x_M-1} \Leftrightarrow (y_M-2)(x_M-1) = x_M(2y_M-3)$$

$$\Rightarrow y_M = \frac{x_M - 2}{x_M + 1}$$

ទំនាក់ទំនងគ្មាន m រវាងកូអរដោនេនៃ M គឺ: $\boxed{y_M = \frac{x_M+2}{x_m+1}}$

អថេរភាពនិងខ្សែកោង (c) តាងសំនុំនៃចំនុច M.

ដោយសារកូអរដោនេនៃចំនុច M ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $y_M = \frac{x_M+2}{x_M+1}$

ដូចនេះសំនុំនៃចំនុច M គឺជាខ្សែកោង (c) : $y = \frac{x+2}{x+1}$ ។

- ដែនកំនត់ : $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- ទិសដៅអថេរភាព:
  - . ដេរីវេ $y' = \frac{(x+1)-(x+2)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0, \ \forall x \in \mathscr{D}.$

ដូចនេះអនុគមន៍គ្មានបរមា ។

. លីមីត និងអាស៊ីមតូត :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{x+1} = \pm\infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

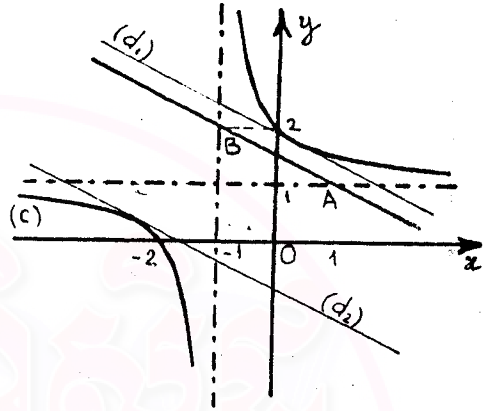
. តារាងអថេរភាព:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
$y=f(x)$	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

- ក្រាប :

. ចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (c) និងអ័ក្ស :

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \ ; \ y = 0 \Rightarrow x = -2$



3- **បង្ហាញថា(D_1), (D_2) កាត់តាមចំនុចនឹង A និង B.**

យើងមាន :

$(D_1) : (m-1)^2 x - (2m-1)y = m^2 - 4m + 2$

$\Leftrightarrow (m^2 - 2m + 1)x - (2m-1)y = m^2 - 4m + 2$

$\Leftrightarrow (x-1)m^2 + (4-2x-2y)m + x + y - 2 = 0$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall m$ បើ

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 4 - 2x - 2y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

ដូច្នេះបន្ទាត់(D_1) កាត់តាមចំនុចនឹង A មួយ គឺ $\boxed{A(1,1)}$

$(D_2) : m(m-1)x + (2m-1)^2 y = 7m^2 - 7m + 2$

$\Leftrightarrow (m^2 - m)x + (4m^2 - 4m + 1)y = 7m^2 - 7m + 2$

$\Leftrightarrow (x + 4y - 7)m^2 + (7 - x - 4y)m + y - 2 = 0$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall m$ បើ:

$$\begin{cases} x + 4y - 7 = 0 \\ 7 - x - 4y = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

ដូច្នេះបន្ទាត់ (D_2) កាត់តាមចំនុចនឹង B មួយគឺ $\boxed{B(-1,2)}$

សមីការនៃបន្ទាត់ (AB):

សមីការនៃបន្ទាត់ (AB) ឲ្យដោយរូបមន្ត :

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \Leftrightarrow \frac{y-1}{x-1}=\frac{2-1}{-1-1} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

ដូច្នេះ គេបាន $\boxed{(AB): y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

4- <u>រកបន្ទាត់ពីរប៉ះនឹង (c) ហើយស្របនឹង (AB)</u>

បន្ទាត់ស្របនឹង (AB) មានសមីការ : $(d): y=-\frac{1}{2}x+k$

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d):

$$\frac{x+2}{x+1}=-\frac{1}{2}x+k \Leftrightarrow x^2+(3-2k)x-(2k-4)=0 \quad (3)$$

បន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) កាលណាសមីការ(3) មាន $\Delta=0$

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (3-2k)^2+4(2k-4)=0$$

$$\Leftrightarrow 4k^2-4k-7=0 \Rightarrow k=\frac{1\pm2\sqrt{2}}{2}$$

ដោយសមីការ $\Delta=0$ មានឫសពីរ $k=\frac{1\pm2\sqrt{2}}{2}$ ដូច្នេះមានបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ពីរដែលស្របនឹងបន្ទាត់ (AB) គឺ:

$$\boxed{(d_1): y=-\frac{1}{2}x+\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\ ;\ (d_2): y=-\frac{1}{2}x+\frac{1-2\sqrt{2}}{2}}$$

<u>កូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះ</u>

អាប់ស៊ីសនៃចំនុចប៉ះជាឫសឌុបនៃសមីការ(3) គឺ $x=-\frac{b}{2a}=\frac{2k-3}{2}$

- បើ $k=\frac{1+2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\frac{1+2\sqrt{2}-3}{2}=\sqrt{2}-1$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1+2\sqrt{2}}{2}=\frac{1-\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

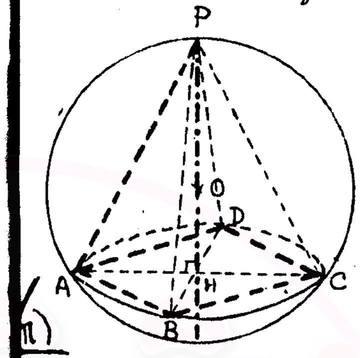
- បើ $k=\frac{1-2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\frac{1-2\sqrt{2}-3}{2}=-\sqrt{2}-1$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1-2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1+1-2\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

ដូច្នេះកូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះគឺ:

$$\boxed{E\left(\sqrt{2}-1;\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right);\quad F\left(-\sqrt{2}-1;\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}$$

II 1. <u>គណនាកាំនៃរង្វង់(c), ជ្រុង |AB|, អង្កត់ |PA|</u>



ប្លង់ (π) ⊥ [PP'] ត្រង់ H គេបាន H ជាផ្ចិតនៃរង្វង់មុខកាត់ (c) និងជាផ្ចិតនៃការេ ABCD។ Δ PAP' កែងត្រង់ A (ចារឹកក្នុងរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត [PP']) ដែលមាន [AH] ជាកំពស់គូសពីA, ដូចនេះ:

$$|AH|^2=|HP|.|HP'|=|HP|(|PP'|-|HP|)$$
$$=x(2R-x)$$

$\Rightarrow |AH|=\sqrt{x(2R-x)}$ ដូចនេះកាំរង្វង់មុខកាត់ (c) គឺ:

$$\boxed{|AH|=\sqrt{x(2R-x)}}$$

|AB| ជាជ្រុងនៃការេចារឹកក្នុងរង្វង់មុខកាត់(c) $\Rightarrow |AB|=|AH|\sqrt{2}$

ដូច្នេះ:

$$\boxed{|AB|=\sqrt{2x(2R-x)}}$$

Δ PAP' កែងត្រង់ A មាន [AH] ជាកំពស់គូសពីកំពូលកែង, គេបាន:

$|PA|^2=|PH|.|PP'|=x.2R \Rightarrow |PA|=\sqrt{2Rx}$

ដូច្នេះ:

$$\boxed{|PA|=\sqrt{2Rx}}$$

2. <u>មាឌសូលីតដែលកើតឡើងដោយពីរ៉ាមីត PABCD និង P'ABCD</u>

តាង V_1 : មាឌនៃពីរ៉ាមីត PABCD, V_2 : មាឌនៃពីរ៉ាមីត P'ABCD.

V : មាឌសូលីតដែលកើតឡើងដោយពីរ៉ាមីតទាំងពីរខាងលើ:

$$\Rightarrow V=V_1+V_2=\frac{1}{3}S_{ABCD}.|PH|+\frac{1}{3}S_{ABCD}.|P'H|$$
$$=\frac{1}{3}S_{ABCD}(|PH|+|P'H|)=\frac{1}{3}|AB|^2.|PP'|$$
$$=\frac{1}{3}.2x.(2R-x).2R=\frac{4}{3}Rx(2R-x)$$

ដូចនេះ: $\boxed{V = \frac{4}{3}Rx(2R-x)}$

<u>គណនា x ដើម្បីឲ្យ V អតិបរមា:</u>

ដោយ R: ថេរ ដូចនេះ V អតិបរមាកាលណា $x(2R-x)$ អតិបរមា ។

ម្យ៉ាងទៀត :

$x+(2R-x)=2R$: ថេរ ដូចនេះផលគុណ $x(2R-x)$ អតិបរមា

បើ: $x = 2R-x \Leftrightarrow 2x = 2R \Rightarrow x = R$

ដូចនេះ: V អតិបរមាកាលណា $\boxed{x=R}$

ហើយ $\boxed{V_{Max} = \frac{4}{3}R^3}$

វិញ្ញាសាទី 6

I 1- គេឲ្យ α ជាចំនួនពិតមិនសូន្យមួយ ។
កំណត់ពីរចំនួនពិត $a(\alpha)$ និង $b(\alpha)$ ដើម្បីឲ្យចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x
អនុគមន៍ $F(x)=e^x[a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x]$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍
$f(x)=e^x\sin\alpha x$

2: ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

3- គណនា $\int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x\,dx$

II. គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=ax^3+bx^3+cx+d \quad (a\neq 0)$

1- កំណត់មេគុណ a,b,c,d ដើម្បីឲ្យខ្សែកោងតាងអនុគមន៍កាត់តាមគល់នៃតម្រុយ ហើយបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនេះផ្គុំបានមុំ $45°$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ អនុគមន៍ មានអតិបរមាត្រង់ $x_1=\alpha$ និងអប្បបរមា $x_2=\beta$ ដែល
$$\begin{cases}\alpha+\beta=6/5\\ \alpha^3+\beta^3=\frac{126}{125}\end{cases}$$

2. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (c) ចំពោះតំលៃដែលរកឃើញនេះ ។

3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $b^2-3ac<0$, $\forall d$ នោះខ្សែកោងតាងអនុគមន៍កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុចតែមួយគត់ ។

4. ឧបមា $a,b,c>0$ និង $d<0$, ស្រាយបញ្ជាក់ថាក្នុងចំណោមចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស មានចំនុចប្រសព្វតែមួយគត់ ដែលមានអាប់ស៊ីសវិជ្ជមាន ។

III. ព្រីស $ABCA'B'C'$ មួយមានបាតជាត្រីកោណសមបាត ABC ដែល $|AB| = |AC|$ និង $\hat{A} = 2\alpha$ ។ ចំណោលកែងនៃកំពូល A' លើបាត ABC ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ដែលមានកាំស្មើ R, ទ្រនុង $[AA']$ ផ្គុំនឹង $[AB]$ បានមុំ 2α ។ គណនាមាឌនិងក្រលាផ្ទៃនៃព្រីស

សំរាយបញ្ជាក់

I. 1- <u>កំណត់ $a(\alpha), b(\alpha)$ ដើម្បីឲ្យ $\forall x$, $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$</u>

$F(x)=e^x[a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x]$, $f(x)=e^x\cdot\sin\alpha x$

ដែល $a(\alpha)$; $b(\alpha)$ ជាចំនួនថេរ ; x ជាអថេរ ,

យើងមាន :

$$F'(x)=e^x[a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x]+e^x[-\alpha a(\alpha)\sin\alpha x+\alpha b(\alpha)\cos\alpha x]$$

$$=e^x[(a(\alpha)+\alpha b(\alpha))\cos\alpha x+(b(\alpha)-\alpha a(\alpha))\sin\alpha x]$$

ដើម្បី: $\forall x$: $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ កាលណា $F'(x)=f(x)$

គឺ: $e^x[(a(\alpha)+\alpha b(\alpha))\cos\alpha x+(b(\alpha)-\alpha a(\alpha))\sin\alpha x]=e^x\sin\alpha x$

$\Leftrightarrow [a(\alpha)+\alpha b(\alpha)]\cos\alpha x+[b(\alpha)-\alpha a(\alpha)]\sin\alpha x=\sin\alpha x$

$\Leftrightarrow [a(\alpha)+\alpha b(\alpha)]\cos\alpha x-[\alpha a(\alpha)-b(\alpha)+1]\sin\alpha x=0$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall x$ កាលណា :

$$\begin{cases} a(\alpha)+\alpha b(\alpha)=0 \\ \alpha a(\alpha)-b(\alpha)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(\alpha)+\alpha b(\alpha)=0 \\ \alpha a(\alpha)-b(\alpha)=-1 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ គេបាន :

$$\boxed{a(\alpha)=-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\ ;\ b(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}}$$

2- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^3x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

យើងមាន:

$$\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x$$

$$=(2\sin x\cos x)\cos x+\sin x(1-2\sin^2x)$$

$$=2\sin x\cos^2x+\sin x-2\sin^3x=2\sin x(1-\sin^2x)+\sin x-2\sin^3x$$

$$=2\sin x-2\sin^3x+\sin x-2\sin^3x=3\sin x-4\sin^3x$$

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x$ គេបាន :

$$\boxed{\sin^3x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x}$$

3. គណនា $\int_0^{\pi/2} e^x\sin^3x\,dx$

យើងមាន :

$e^x\sin^3x=\frac{3}{4}e^x\sin x-\frac{1}{4}e^x\sin 3x$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2}e^x\sin^3x\,dx=\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}e^x\sin x\,dx-\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}e^x\sin 3x\,dx \quad (1)$

តាមសំនួរទី 1 :

$F(x)=e^x\left[-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cos\alpha x+\frac{1}{1+\alpha^2}\sin\alpha x\right]$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=e^x\sin\alpha x$

- បើ $\alpha=1\Rightarrow F(x)=e^x(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=e^x\sin x$

- បើ $\alpha=3\Rightarrow F(x)=e^x(-\frac{3}{10}\cos 3x+\frac{1}{10}\sin 3x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=e^x\sin 3x$

ដូចនេះ (1) ទៅជា :

$$\int_0^{\pi/2}e^x\sin^3x\,dx=\frac{3}{4}\left[e^x(-\tfrac{1}{2}\cos x+\tfrac{1}{2}\sin x)\right]_0^{\pi/2}-\frac{1}{4}\left[e^x(-\tfrac{3}{10}\cos 3x+\tfrac{1}{10}\sin 3x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{3}{4}\left[e^{\pi/2}(\tfrac{1}{2})-e^0(-\tfrac{1}{2})\right]-\frac{1}{4}\left[e^{\pi/2}(-\tfrac{1}{10})-e^0(-\tfrac{3}{10})\right]$$

$$=\left(\frac{3}{8}e^{\pi/2}+\frac{3}{8}\right)-\left(-\frac{1}{40}e^{\pi/2}+\frac{3}{40}\right)=\frac{2}{5}e^{\pi/2}+\frac{3}{10}$$

ដូចនេះ: $$\boxed{\int_0^{\pi/2}e^x\sin^3x\,dx=\frac{2}{5}e^{\pi/2}+\frac{3}{10}}$$

II. 1. កំនត់ a,b,c,d $(a\neq 0)$

យើងមាន : $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

ខ្សែកោងកាត់តាមគល់ O $(0,0)$ កាលណា $f(0)=0\Leftrightarrow d=0$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $O(0,0)$ គឺ $k=f'(0)=c$

តែបន្ទាត់ប៉ះនេះធ្វើបានមុំ $45°$ ជាមួយអ័ក្ស $\vec{Ox}\Rightarrow k=tg45°=1$ $\Big\}\Rightarrow c=1$

អនុគមន៍មានអតិបរមាត្រង់ $x_1=\alpha$ និងអប្បបរមា $x_2=\beta$ កាលណា

$\begin{cases} f'(\alpha)=0 \\ f'(\beta)=0 \end{cases}$ (i) ដែល $f'(x)=3ax^2+2bx+1$ (ព្រោះ: $c=1$)

- គណនា α និង β :

$\alpha+\beta=\frac{6}{5} \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=\frac{36}{25}$ (2) (លើកជាការេ)

$\alpha^3+\beta^3=\frac{126}{125} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=\frac{126}{125}$

$\Leftrightarrow \frac{6}{5}(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=\frac{126}{125} \Rightarrow \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=\frac{21}{25}$ (3)

$(2)-(3) \Rightarrow 3\alpha\beta=\frac{15}{25} \Rightarrow \alpha\beta=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$

ដូចនេះ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការថ្មី :

$\begin{cases}\alpha+\beta=6/5\\ \alpha\beta=\frac{1}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1/5\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}\alpha=1/5\\ \beta=1\end{cases}$

យកតម្លៃ α និង β នេះជំនួសក្នុងប្រព័ន្ធ (i) យើងបាន:

$\begin{cases}f'(1)=0\\ f'(1/5)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a+2b+1=0\\ \frac{3}{25}a+\frac{2}{5}b+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=5/3\\ b=-3\end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{a=5/3;\ b=-3;\ c=1,\ d=0}$

អនុគមន៍នេះគេបាន $y=f(x)=\frac{5}{3}x^3-3x^2+x$

2. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប (c): $y=f(x)=\frac{5}{3}x^3-3x^2+x$

- ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

- ទិសដៅអថេរភាព

. ដេរីវេ: $y'=5x^2-6x+1$

$y''=10x-6=2(5x-3)$

$y'=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=\frac{1}{5}$

. បរមា:

$x=1 \Rightarrow y=f(1)=-1/3$

$x=1/5 \Rightarrow y=f(1/5)=\frac{7}{75}$

. ចំណុចរបត់:

ដោយ y'' ស្មើសូន្យនិងប្តូរសញ្ញាត្រង់ $x=3/5$ ដូចនេះចំណុច $I(3/5;-\frac{3}{25})$ ជាចំណុចរបត់

. លីមីត

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{5}{3}x^3-3x^2+x)=\pm\infty$

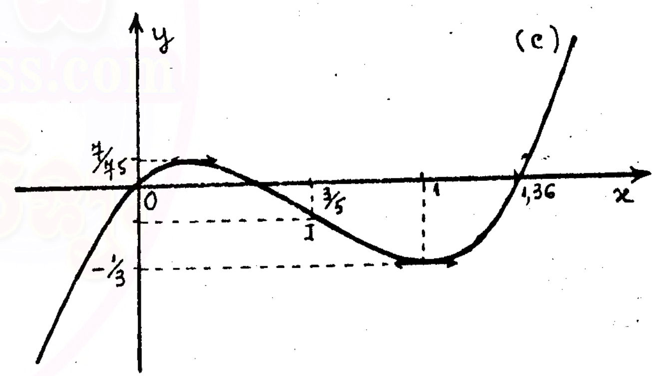
. តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$1/5$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y=f(x)$	$-\infty$	↗	$7/75$	↘	$-1/3$	↗	$+\infty$

- ក្រាប

. ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស

$y=0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x^3-3x^2+x=0 \Rightarrow x=0,\ x=\frac{9\pm\sqrt{21}}{10}$ $x_1\simeq 1,36$; $x_2\simeq 0,44$



3. បើ $b^2-3ac<0,\ \forall d$ នោះក្រាបតាមកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុចតែមួយគត់

អនុគមន៍ $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ មាន:

$y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$

ត្រីធា $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$ មាន $\Delta'=b^2-3ac<0$ (ស.ក)

$\Rightarrow y'=f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $3a$ គឺ $y'>0$ បើ $a>0$; $y'<0$ បើ $a<0$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $y' = f(x)$ កើនជានិច្ច (បើ $a>0$) ឬ ចុះជានិច្ច (បើ $a<0$)
ដោយ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ឬ ចុះជានិច្ច ដូច្នេះ ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍
$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ កាត់អក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុចតែមួយគត់ ។

4- $a,b,c>0$ និង $d<0$ បង្ហាញថាមានចំនុចប្រសព្វតែមួយគត់ដែលមានអាប់ស៊ីសវិជ្ជមាន

យើងនឹងសិក្សាអនុគមន៍ $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ក្នុងចន្លោះ
$D_1 = [0,+\infty[$ ។ យើងមាន :
$y'=3ax^2+2bx+c>0, \forall x \in D_1$ ព្រោះ: $a,b,c>0$
$\Rightarrow y=f(x)$ កើនដាច់ខាតក្នុងចន្លោះ $D_1=[0,+\infty[$:
- ចំពោះ: $x=0 \Rightarrow y=f(0)=d<0$ (សម្មតិកម្ម)

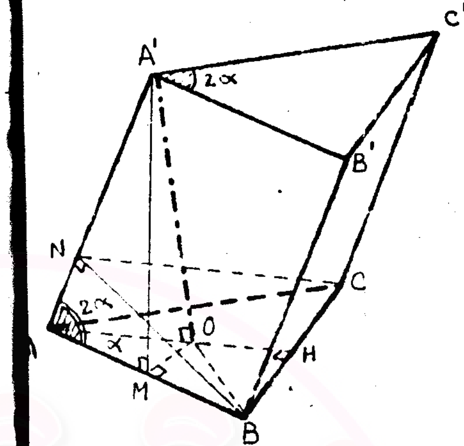
$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d) = +\infty$$

x	0	x_0	$+\infty$
y'		+	
$y=f(x)$	d	0	$+\infty$

តាមតារាង យើងឃើញថា ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ ក្នុងចន្លោះ $[0,+\infty[$
កាត់អក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុច $x_0>0$ តែមួយគត់ ។
ដូច្នេះ ក្នុងចំនោមចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍និងអក្ស
អាប់ស៊ីស មានចំនុចប្រសព្វតែមួយគត់ ដែលមានអាប់ស៊ីសវិជ្ជមាន ។

III. ក. មាឌនៃព្រីស $ABCA'B'C'$

យក O ជាចំណោលកែងនៃ A' លើប្លង់ ABC នោះ O នៅលើកំពស់
$[AH]$ នៃត្រីកោណសមបាត ABC ។ ដូចនេះតាមសម្មតិកម្ម :
$|OA|=|OB|=|OC|=R$, $\widehat{BAH}=\widehat{CAH}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=\alpha$, $(A'O)\perp(ABC)$



ម្យ៉ាងទៀត យក M ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[AB]$
- គេបាន $(OM)\perp(AB)$ (ព្រោះ $[OM]$ ជាកំពស់ត្រីកោណសមបាត AOB)

ចំពោះត្រីកោណកែង ACM គេបាន :

$$\sin\alpha = \frac{|OM|}{|OA|} \Rightarrow |OM| = |OA|\sin\alpha = R\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{|AM|}{|OA|} \Rightarrow |AM| = |OA|\cos\alpha = R\cos\alpha$$

ដោយ M កណ្តាល $[AB]$, គេបាន :
$|AB| = 2|AM| = 2R\cos\alpha$

ដោយ $\left.\begin{array}{l}(A'O)\perp(ABC)\\(OM)\perp(AB)\\(AB)\subset(ABC)\end{array}\right| \Rightarrow (A'M)\perp(AB)$ ដូចនេះ $\Delta AMA'$ កែងត្រង់ M

ចំពោះត្រីកោណកែង AMA' គេបាន :

$$\cos 2\alpha = \frac{|AM|}{|AA'|} \Rightarrow |AA'| = \frac{|AM|}{\cos 2\alpha} = \frac{R\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{R\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$$

ត្រីកោណ AOA' កែងត្រង់ O, គេបាន :

$$|A'O|^2 = |AA'|^2 - |OA|^2 = \frac{R^2\cos^2\alpha}{\cos^2 2\alpha} - R^2 = \frac{R^2\cos^2\alpha - R^2\cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$$

$$= \frac{R^2}{\cos^2 2\alpha}(\cos^2\alpha - \cos^2 2\alpha) = \frac{R^2}{\cos^2 2\alpha}\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{R^2}{\cos^2 2\alpha}\cdot \sin\alpha . \sin 3\alpha$$

$$\Rightarrow |A'O| = \frac{R}{\cos 2\alpha}\sqrt{\sin\alpha . \sin 3\alpha}$$

មាឌព្រីស $ABCA'B'C'$ គិតដោយ :

$$V = S_{ABC} . |A'O| = \frac{1}{2}|AB|.|AC|\sin 2\alpha . |A'O|$$

$$= \frac{1}{2}(2R\cos\alpha)^2 . \sin 2\alpha \frac{R}{\cos 2\alpha}\sqrt{\sin\alpha . \sin 3\alpha} = 2R^3\cos^2\alpha . tg 2\alpha\sqrt{\sin\alpha . \sin 3\alpha}$$

ដូច្នេះ: $\boxed{V = 2R^3 \cos^2\alpha \, tg 2\alpha \sqrt{\sin\alpha . \sin 3\alpha}}$

៣- ក្រលាផ្ទៃខាងនៃព្រីស

តាម (BC) សង់ប្លង់មួយកែងនឹង $[AA']$ ត្រង់ N , គេបាន :

ΔBCN ជាមុខកាត់កែងនៃព្រីស ហើយ $|BN| = |CN|$ (ព្រោះ: $\Delta ABN \cong \Delta ACN$)

ΔANB កែងត្រង់ N , គេបាន :

$$\sin 2\alpha = \frac{|BN|}{|AB|} \Rightarrow |BN| = |AB| \sin 2\alpha = 2R\cos\alpha \sin 2\alpha$$

$$|BN| = |CN| = 2R\cos\alpha . \sin 2\alpha$$

ΔABH កែងត្រង់ H , គេបាន :

$$\sin\alpha = \frac{|BH|}{|AB|} \Rightarrow |BH| = |AB| \sin\alpha = 2R\cos\alpha \sin\alpha$$

$$|BC| = 2|BH| = 4R\cos\alpha \sin\alpha = 2R \sin 2\alpha .$$

ក្រលាផ្ទៃខាងនៃព្រីស :

$S_\ell =$ បរិមាត្រមុខកាត់កែង x ទ្រនុងចំហៀង

$$= (|BN| + |CN| + |BC|) . |AA'| = (2|BN| + |BC|) . |AA'|$$

$$= (4R\cos\alpha \sin 2\alpha + 2R \sin 2\alpha) \frac{R\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$= \frac{2R^2 \cos\alpha \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} (2\cos\alpha + 1)$$

$$= 2R^2 \cos\alpha \, tg 2\alpha (2\cos\alpha + 1)$$

ដូច្នេះ: $\boxed{S_\ell = 2R^2 \cos\alpha \, tg 2\alpha (2\cos\alpha + 1)}$

វិញ្ញាសាទី 7

I. 1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\log_2 \cos 20° + \log_2 \cos 40° + \log_2 \cos 80° = -3$

2. បន្ទះសង្កសីមួយរាងចតុកោណកែងមានវិមាត្រ a និង b ។ គេកាត់ចេញពីបន្ទះនេះនូវការេ 4 ប៉ុនគ្នា ដើម្បីឲ្យផ្នែកនៅសល់អាចបត់បានជាប្រអប់គ្មានគំរបរាងប្រលេពីប៉ែតកែងមួយ ។ គណនាជ្រុងការេដែលត្រូវកាត់ចេញ ដើម្បីឲ្យប្រអប់មានមាឌអតិបរមា ។

II. គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $y = f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$

1. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ ។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 0$ ។

2. បន្ទាត់មួយស្របនឹងអ័ក្ស $\vec{Ox}$ មានអរដោនេស្មើ h កាត់ខ្សែកោង (C) ត្រង់ពីរចំនុច M', M'' ដែលមានអាប់ស៊ីស x', x'' ។ គណនាផលបូកនិងផលគុណ $x' + x''$, $x'x''$ ជាអនុគមន៍នៃ h រួចបង្ហាញថា ផលបូក : $\frac{1}{x'+1} + \frac{1}{x''+1}$ មិនអាស្រ័យនឹង h ។

3. តាង I ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[M'M'']$ ។ រកសំនុំនៃចំនុច I កាលណា h ប្រែប្រួល ។ សង់ខ្សែកោងតាងសំនុំនេះក្នុងតំរុយជាមួយខ្សែកោង (C) ។

III. មានពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត SABCD មួយមានកំពូល S ។ គេកាត់ពីរ៉ាមីតនេះដោយប្លង់មួយមិនស្របនឹងប្លង់បាត ។ ប្លង់នេះប្រសព្វនឹងទ្រនុង $[SA], [SB], [SC], [SD]$ រៀងគ្នាត្រង់ចំនុច M, N, P, Q ; $[MP]$ និង $[NQ]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ L ។ គេឲ្យ $|SM| = a; |SN| = b, |SP| = c, |SQ| = d, |SL| = \ell,$ $\widehat{ASH} = \alpha$ ($[SH]$ ជាកំពស់នៃពីរ៉ាមីត) ។

1. គណនាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណ SMP ជាអនុគមន៍នៃ a, c និង α

2. ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2\cos\alpha}{\ell}$

3. ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$

សំរាយបញ្ជាក់

I. 1- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\log_2 \cos 20° + \log_2 \cos 40° + \log_2 \cos 80° = -3$

តាមលំហាត់គំរូទី ឆ្នាំសាទី 5 សំនួរ I (1) គេបាន :

$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80° = \sin 70° \cdot \sin 50° \cdot \sin 10° = 1/8$

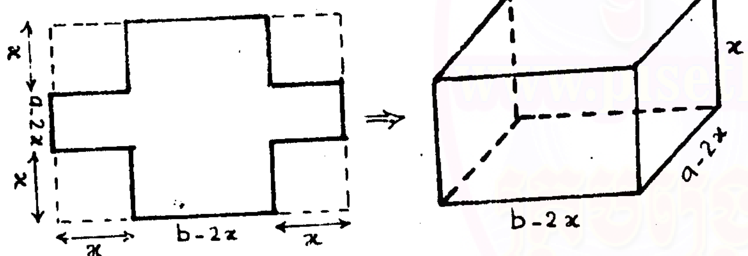
$\Rightarrow \log_2(\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°) = \log_2 1/8 = \log_2 2^{-3}$

$\log_2 \cos 20° + \log_2 \cos 40° + \log_2 \cos 80° = -3$

(ព្រោះ: $\log_a xyz = \log_a x + \log_a y + \log_a z$, $\log_a a^n = n$)

ដូចនេះ: $\boxed{\log_2 \cos 20° + \log_2 \cos 40° + \log_2 \cos 80° = -3}$

2. គណនាវិមាត្រការេដែលត្រូវកាត់ចេញដើម្បីបានមាឌធំបំផុត



តាង x ជាវិមាត្រការេ $(x>0)$, ឧបមាថា $a<b$

លក្ខខ័ណ្ឌ: $\begin{cases} b-2x>0 \\ a-2x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<b/2 \\ 0<x<a/2 \end{cases} \Rightarrow 0<x<a/2$

មាឌប្រអប់គឺ:

$V = (b-2x)(a-2x)x = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx$

$\Rightarrow V' = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$

$V' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0$ ដោះស្រាយសមីការនេះ:

គេបាន : $x_1 = \dfrac{(a+b) - \sqrt{a^2-ab+b^2}}{b} < x_2 = \dfrac{(a+b)+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$

ពិនិត្យឫស x_1 នៃសមីការខាងលើ :

$x_1 = \frac{1}{6}\left[(a+b) - \sqrt{a^2-ab+b^2}\right] = \frac{1}{6}\left[\sqrt{a^2+2ab+b^2} - \sqrt{a^2-ab+b^2}\right] > 0$

(ព្រោះ: $a>0, b>0 \Rightarrow a+b = \sqrt{a^2+2ab+b^2}$)

ម្យ៉ាង: $0 < x_1 = \frac{1}{6}\left[(a+b) - \sqrt{a^2-ab+b^2}\right] < x_2 = \frac{1}{6}\left[(a+b) + \sqrt{a^2-ab+b^2}\right]$

តាមលក្ខខ័ណ្ឌ: $0<x<a/2$ ដូចនេះ យើងត្រូវប្រៀបធៀបឫស x_1, x_2

ជាមួយ $\alpha = a/2$ ។

តាង $g(x) = V' = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$, យើងបាន

$12\,g(a/2) = 12\left[12 \cdot \frac{a^2}{4} - 4(a+b)\frac{a}{2} + ab\right]$

$= 12(a^2 - ab) < 0$

(ព្រោះ: $a>0, b>0$ $a<b \Rightarrow a^2 < ab \Leftrightarrow a^2 - ab < 0$)

ដោយ $12\,g(a/2) < 0 \Rightarrow 0 < x_1 < a/2 < x_2$

យើងបានតារាង

x	$-\infty$	0	x_1	$a/2$	x_2	$+\infty$
V'	+	+	0 −	−	0 +	
V		↗		↘		

តាមតារាងមាឌ V អតិបរមាពេល: $x = \frac{1}{6}\left[(a+b) - \sqrt{a^2-ab+b^2}\right]$

ដូច្នេះវិមាត្រការេដែលត្រូវកាត់ចេញគឺ

$\boxed{x = \frac{1}{6}\left[(a+b) - \sqrt{a^2-ab+b^2}\right]}$

II. $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$

1- សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C)

- ដែនកំណត់ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- ទិសដៅអថេរភាព ។

- ដេរីវេ : $y'=\dfrac{(4x-2)(x+1)^2-2(x+1)(2x^2-2x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{2(3x-2)}{(x+1)^3}$

y' មានសញ្ញាដូច $(x+1)(3x-2)$

$y'=0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

• បរមា : $x=\frac{2}{3} \Rightarrow y=f(\frac{2}{3})=\frac{1}{5}$

– លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2}=2 \Rightarrow$ បន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x\to -1} y=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2}=+\infty \Rightarrow$ បន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

• តារាងអថេរភាព

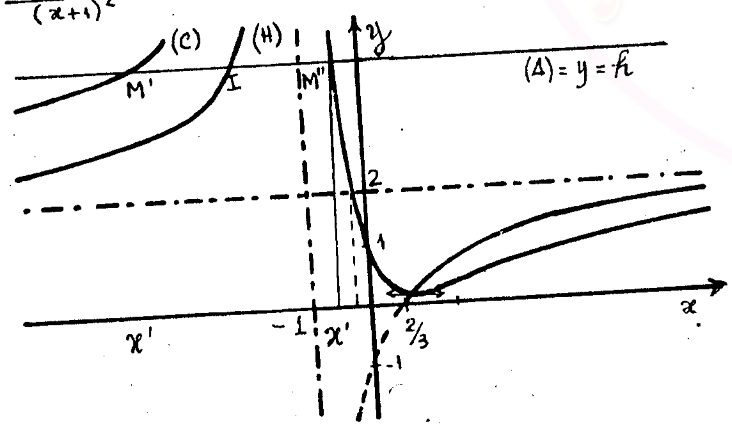
x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$y=f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{5}$	↗	2

ក្រាប

• ចំនុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងនិងអ័ក្ស : $x=0 \Rightarrow y=1$

• ចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអាស៊ីមតូតដេក $y=2$

$\dfrac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2}=2 \Leftrightarrow 6x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{6}$



សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង (c) ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$

បើ $x=0 \Rightarrow y=1$ ដូចនេះ $A(0,1)$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A : $f'(0)=\dfrac{2(0-2)}{(0+1)^3}=-4$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង(c)ត្រង់A : $y-1=-4(x-0) \Rightarrow y=-4x+1$

ដូច្នេះបន្ទាត់ប៉ះនឹង(c)ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$ គឺ

$$\boxed{(D): y=-4x+1}$$

2. គណនា $x'+x''$ និង $x'x''$ ជាអនុគមន៍នៃ h

តាង (Δ) ជាបន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្ស $O\vec{x}$ ដែលមានអរដោនេស្មើ $h \Rightarrow (\Delta): y=h$

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (Δ) :

$\dfrac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2}=h \Leftrightarrow 2x^2-2x+1=h(x^2+2x+1) \quad (x\neq -1)$

$\Leftrightarrow (2-h)x^2-2(1+h)x+1-h=0 \quad (1)$

អាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វ M', M'' គឺជាឫស x', x'' នៃសមីការ (1)

$\Rightarrow x'+x''=\dfrac{2(1+h)}{2-h}$; $x'x''=\dfrac{1-h}{2-h}$

បង្ហាញថា $\dfrac{1}{x'+1}+\dfrac{1}{x''+1}$ មិនអាស្រ័យនឹង h

យើងមាន :

$$\frac{1}{x'+1}+\frac{1}{x''+1}=\frac{(x''+1)+(x'+1)}{(x'+1)(x''+1)}=\frac{(x'+x'')+2}{x'x''+(x'+x'')+1}$$

$$=\frac{\frac{2(1+h)}{2-h}+2}{\frac{1-h}{2-h}+\frac{2(1+h)}{2-h}+1}=\frac{2(1+h)+2(2-h)}{1-h+2(1+h)+2-h}=\frac{6}{5}$$

ដោយ $\dfrac{1}{x'+1}+\dfrac{1}{x''+1}=\frac{6}{5}$ ថេរ ដូចនេះផលបូកនេះមិនអាស្រ័យនឹង h ទេ ។

3. រកកូអរដោនេចំនុចកណ្ដាល I នៃ $[M'M'']$

អាប់ស៊ីសនៃចំនុច I កំនត់ដោយ $x_I=\dfrac{x'+x''}{2}=\dfrac{1+h}{2-h}$

$\Leftrightarrow (2-h)x_I = 1+h \Rightarrow h = \dfrac{2x_I-1}{x_I+1}$

ដោយ $I \in (\Delta : y = h \Rightarrow y_I = h$

$$\left.\begin{array}{l} y_I = h \\ h = \dfrac{2x_I-1}{x_I+1} \end{array}\right| \Rightarrow y_I = \dfrac{2x_I-1}{x_I+1}$$

ក្នុងករណីនេះនៃចំនុច I ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $y_I = \dfrac{2x_I-1}{x_I+1}$ ដូចនេះ សំនុំនៃចំនុច I គឺជាខ្សែកោង $(H): y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ ។

<u>សង់ខ្សែកោង (H</u>

ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

ដេរីវេ : $y' = \dfrac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \in D$.

លីមីត :

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x \to -1} y = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x-1}{x+1} = \pm\infty \Rightarrow x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

តារាងអថេរភាព :

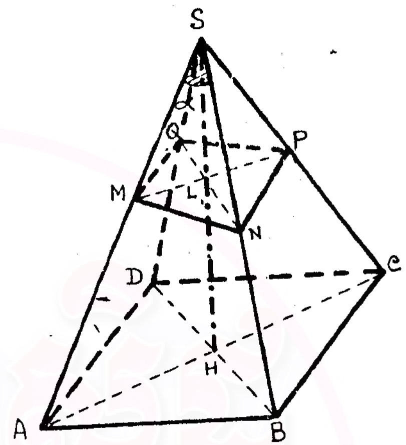
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow$	2

<u>សំនុំនៃចំនុច I</u>

អត្ថិភាពនៃចំនុច I អាស្រ័យនឹងអត្ថិភាពនៃចំនុច M', M'' ។ M', M'' មានអត្ថិភាពបើ $h \in [1/5, 2[\cup]2, +\infty[$ ដូចនេះសំនុំនៃចំនុច I គឺជាចំណែកខ្លះនៃខ្សែកោង (H) ដែលត្រូវនឹង $y \in [1/5, 2[\cup]2, +\infty[$ (គឺផ្នែកដែលគូសដិត) ។

III. 1. <u>ក្រលាផ្ទៃនៃ ΔSMP</u> ជាអនុគមន៍នៃ a, c និង α

SABCD ជាពីរ៉ាមីតបួនជ្រុងទៀត នោះចំណោលកែងរបស់ H ...



ដោយផ្ទៃបាត ABCD ត្រីកោណ SAC និង SBD ជាត្រីកោណសមបាតប៉ុនគ្នាមានកំពស់រួម $[SH]$ ដែលមានមុំកំពូល $\widehat{ASC} = \widehat{BSD} = 2\widehat{ASH} = 2\alpha$

ម្យ៉ាងទៀត :

$\{L\} = [MP] \cap [NQ] \Rightarrow L \in [MP],\ L \in [NQ]$

$$\left.\begin{array}{l} L \in [MP] \\ (MP) \subset (ASC) \end{array}\right| \Rightarrow L \in (ASC)$$

ដូចគ្នាដែរ $L \in (BSD)$

$$\left.\begin{array}{l} L \in (ASC) \\ L \in (BSD) \\ (ASC) \cap (BSD) = (SH) \end{array}\right| \Rightarrow L \in (SH)$$

ក្រលាផ្ទៃ ΔSMP គណនាដោយ :

$S_1 = \frac{1}{2}|SM||SP| \sin \widehat{MSP} = \frac{1}{2} ac \sin 2\alpha = \frac{1}{2} ac(2\sin\alpha \cos\alpha)$

ដូចនេះ ក្រលាផ្ទៃ ΔSMP គឺ : $\boxed{S_1 = ac \sin\alpha \cos\alpha}$

2. <u>ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង</u> $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2\cos\alpha}{\ell}$

យើងមាន

ក្រ.ផ្ទៃ(ΔSMP) = ក្រ.ផ្ទៃ(ΔSML) + ក្រ.ផ្ទៃ(ΔSLP)

$\Leftrightarrow S_1 = \frac{1}{2}|SM|.|SL| \sin \widehat{MSL} + \frac{1}{2}|SL|.|SP| \sin \widehat{LSP}$.

ដោយ $L \in (SH) \Rightarrow \widehat{MSL} = \widehat{LSP} = \alpha$.

$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} a\ell \sin\alpha + \frac{1}{2} \ell c \sin\alpha$

$\Leftrightarrow ac \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} \ell \sin\alpha (a+c)$

$\Leftrightarrow ac \cos\alpha = \frac{1}{2}\ell(a+c) \Leftrightarrow 2ac\cos\alpha = \ell(a+c)$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង ael យើងបាន:

$$\frac{2ae\cos\alpha}{ael} = \frac{al+el}{ael} \iff \frac{2\cos\alpha}{l} = \frac{1}{c}+\frac{1}{a}$$

ដូចនេះ: $$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2\cos\alpha}{l}} \quad (1)$$

2. ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង: $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$

$L\in(SA) \Rightarrow \widehat{QSL}=\widehat{LSP}=\alpha$ (ព្រោះ SABCD ជាពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត)

ក្រលាផ្ទៃ(ΔQSN) = ក្រ.ផ្ទៃ(ΔQSL) + ក្រ.ផ្ទៃ(ΔLSN)

$$\iff \frac{1}{2}|SQ||SN|\sin\widehat{QSN} = \frac{1}{2}|SQ||SL|\sin\widehat{QSL}+\frac{1}{2}|SL||SN|\sin\widehat{LSP}$$

$$\iff \frac{1}{2}bd\sin 2\alpha = \frac{1}{2}dl\sin\alpha+\frac{1}{2}lb\sin\alpha$$

$$\iff 2bd\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha(dl+bl)$$

$\iff 2bd\cos\alpha = dl+bl$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង bdl គេបាន:

$$\frac{2bd\cos\alpha}{bdl}=\frac{dl}{bdl}+\frac{bl}{bdl} \iff \frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{2\cos\alpha}{l} \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) យើងបាន:

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}$$

វិញ្ញាសាទី ៨

I. គេមានត្រីកោណ ABC ដែលជ្រុងមានរង្វាស់ b, a, c (ជ្រុងឈមនឹងមុំ B, A, C) បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$
2. គណនាមុំ B និង C ជាអនុគមន៍នៃមុំ A

II. 1. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)=4x^3-3x$

2. ពិភាក្សាទៅតាមតម្លៃ m ចំនួនឫសនៃសមីការ $4x^3-3x+m=0$
3. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់ចំនុចរបត់ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចដទៃទៀតនៃខ្សែកោង (c) មិនកាត់តាមចំនុចរបត់ទេ ។
4. កំនត់ p ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ $(\Delta): y=p(x-1)-1$ ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ។
5. សរសេរសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំនុចអតិបរមានិងអប្បបរមានៃខ្សែកោង (c) រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់នេះកាត់តាមចំនុចរបត់នៃខ្សែកោង ។

III. គេមានចតុមុខ SABC មួយមានទ្រនុង $[SA]$ កែងនឹងប្លង់ (ABC); ទ្វេមុខទ្រនុង (SB) ជាទ្វេមុខកែង ។ គេឲ្យ $|SB|=a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC}=\frac{\pi}{4}$, $\widehat{ASB}=\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ ។

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(BC)\perp(SB)$ ។ កំនត់ផ្ចិត ω និង កាំ R នៃស្វ៊ែចារឹកក្រៅចតុមុខ SABC
2. គណនាមាឌនៃចតុមុខ SABC ។ ចំពោះតម្លៃណានៃ α ទើបមាឌនេះអតិបរមា ?
3. កំនត់ α ដើម្បីឲ្យរង្វាស់មុំពីរញ្ញានៃទ្វេមុខទ្រនុង (SC) ស្មើនឹង $\frac{\pi}{3}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

I.

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$

យើងមាន: $A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$

ដោយ b,a,c បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត $\Rightarrow 2a=b+c$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស យើងបាន:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{2a}{\sin B+\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A}=\frac{2}{\sin B+\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \sin B+\sin C=2\sin A$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}=4\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}=4\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=4\sin\frac{B+C}{2}.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)=2\sin\frac{A}{2}=2\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\right] \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)=2\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$\Leftrightarrow 3\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}}$$

2. គណនាមុំ B និង C ជាអនុគមន៍នៃ A

ពីទំនាក់ទំនង (1): $\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)=2\sin\frac{A}{2}$ តាង

$\cos\alpha=2\sin\frac{A}{2} \Rightarrow 0<2\sin\frac{A}{2}\leqslant 1 \Leftrightarrow 0<\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0<A\leqslant\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)=2\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{B}{2}-\frac{C}{2}=\pm\alpha$

តែ $A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$

ដូចនេះ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\frac{B}{2}-\frac{C}{2}=\alpha\\ \frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases}\frac{B}{2}-\frac{C}{2}=-\alpha\\ \frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ យើងបាន

$$\begin{cases}B=\frac{\pi}{2}+\alpha-\frac{A}{2}\\ C=\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{A}{2}\end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases}B=\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{A}{2}\\ C=\frac{\pi}{2}+\alpha-\frac{A}{2}\end{cases}$$

II.

1. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប $(c): y=f(x)=4x^3-3x$

- ដែនកំណត់ $\mathcal{D}=\mathbb{R}$
- ទិសដៅអថេរភាព

. ដេរីវេ: $y'=12x^2-3=3(4x^2-1)$

$y''=24x$

$y'=0 \Leftrightarrow 4x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

. បរមា:

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=f(\frac{1}{2})=-1$

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=f(-\frac{1}{2})=1$

. ចំណុចរបត់:

ដោយ $y''=0$ និងប្តូរសញ្ញាចំពោះ: $x=0 \Rightarrow$ ចំណុច $O(0,0)$ ជាចំណុចរបត់

. លីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}(4x^3-3x)=\pm\infty$$

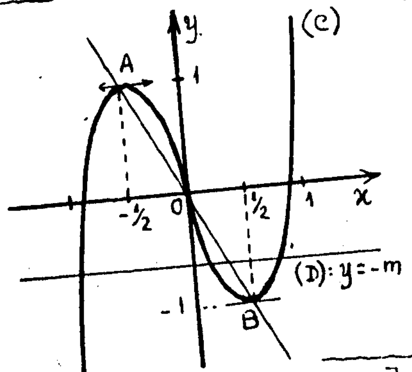
. តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
$y=f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	−1	↗	$+\infty$

-ក្រាប

. ចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស :

$y=0 \Leftrightarrow 4x^3-3x=0 \Rightarrow x=0,\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm 0,86$



2- <u>ចំនួនឫសនៃសមីការ</u>

$4x^3-3x+m=0 \quad (1)$

សមីការ (1) អាចសរសេរជា

$4x^3-3x=-m$ នេះជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង(c) និងបន្ទាត់ $(D): y=-m$ ។ កាត់ខ្សែកោង(c) ដោយបន្ទាត់ (D) យើងបាន:

* បើ $-m \in]-\infty,-1[\Leftrightarrow m \in]1,+\infty[$: (1) មានឫសមួយ
* បើ $-m=-1 \Leftrightarrow m=1$: (1) មានឫសបីដែល $x_1=-1$ $x_2=x_3=1/2$
* បើ $-m \in]-1,1[\Leftrightarrow m \in]-1,1[$: (1) មានឫសបីផ្សេងគ្នា
* បើ $-m=1 \Leftrightarrow m=-1$: (1) មានឫសបីដែល $x_1=1$ $x_2=x_3=-1/2$
* បើ $-m \in]1,+\infty[\Leftrightarrow m \in]-\infty,-1[$: (1) មានឫសមួយ

3- <u>សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង(c) ត្រង់ចំនុចរបត់ O(0,0)</u>

មេគុណប្រាប់ទិសត្រង់ចំនុចរបត់គឺ: $f'(0)=12.0-3=-3$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចរបត់កំនត់ដោយ :

$y-y_0=f'(0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-0=-3(x-0)$

$\Rightarrow y=-3x$

<u>បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចដទៃទៀតនៃ(c) មិនកាត់តាមចំនុចរបត់</u>

តាង $M(x_0,y_0)$ ជាចំនុចប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ដែលខុសពីចំនុចរបត់

O(0,0) : ក្នុងករណីនេះគេបាន : $x_0 \neq 0, y_0=4x_0^3-3x_0 \neq 0$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុច M គឺ: $f'(x_0)=12x_0^2-3$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់ចំនុច $M(x_0,y_0)$ គឺ:

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-4x_0^3+3x_0=(12x_0^2-3)(x-x_0) \quad (2)$

ឧបមាថាបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M(x_0,y_0)$ កាត់តាមចំនុចរបត់ O(0,0) នោះ កូអរដោនេនៃចំនុច O ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (2) គឺ:

$0-4x_0^3+3x_0=(12x_0^2-3)(0-x_0) \quad (x_0 \neq 0)$

$\Leftrightarrow 4x_0^3-3x_0=x_0(12x_0^2-3) \quad (x_0 \neq 0)$

$\Leftrightarrow x_0(4x_0^2-12x_0^2)=0 \Leftrightarrow -8x_0^3=0 \Rightarrow x_0=0$

ចំលើយ $x_0=0$ មានទំនាស់នឹង $x_0 \neq 0$ (ចំនុច $M \neq$ ចំនុច O)

ប្រការនេះបញ្ជាក់ថា <u>បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង(c) ត្រង់ចំនុចដទៃទៀត (គឺចំនុចដែលខុសពីចំនុចO) មិនកាត់តាមចំនុចរបត់ទេ</u> ។

4- <u>កំនត់ p ដើម្បីឲ្យ (Δ: $y=p(x-1)-1$ ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c)</u>

$(c): y=f(x)=4x^3-3x$

$(\Delta): y=g(x)=p(x-1)-1$

អាប់ស៊ីសចំនុចប៉ះរវាង (Δ) និង (c) គឺជាឫសនៃប្រព័ន្ធ :

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-3x=p(x-1)-1 & (i) \\ 12x^2-3=p \end{cases}$$

យក $p=12x^2-3$ ជំនួសក្នុង (i) យើងបាន:

$4x^3-3x=(12x^2-3)(x-1)-1$

$\Leftrightarrow 8x^3-12x^2+2=0 \Leftrightarrow 4x^3-6x^2+1=0$

$\Leftrightarrow (4x^3-2x^2)-(4x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2(2x-1)-(2x-1)(2x+1)=0$

$\Leftrightarrow (2x-1)(2x^2-2x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ 2x^2-2x-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1/2 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ p=12x^2-3 \end{array}\right| \Rightarrow p=12\cdot\frac{1}{4}-3=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \\ p=12x^2-3 \end{array}\right| \Rightarrow p=12\cdot\left(\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)^2-3=3(1\pm\sqrt{3})^2-3$$
$$=3(4\pm2\sqrt{3})-3=3(3\pm2\sqrt{3})$$

ដូច្នេះបន្ទាត់ (Δ) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) បើ:

$$\boxed{p=0 \text{ ឬ } p=3(3\pm2\sqrt{3})}$$

5- សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំនុចបរមាទៃ (c)

អនុគមន៍មានអតិបរមាត្រង់ $A(-\frac{1}{2};1)$ និងមានអប្បបរមាត្រង់ $B(\frac{1}{2},-1)$ ។

សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំនុចបរមាទៃអនុគមន៍មានសមីការ:

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \Leftrightarrow \frac{y-1}{x+1/2}=\frac{1+1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=-2$$

$\Leftrightarrow y-1=-2x-1$

$\Rightarrow y=-2x$

ដូច្នេះបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំនុចបរមាទៃអនុគមន៍មានសមីការ:

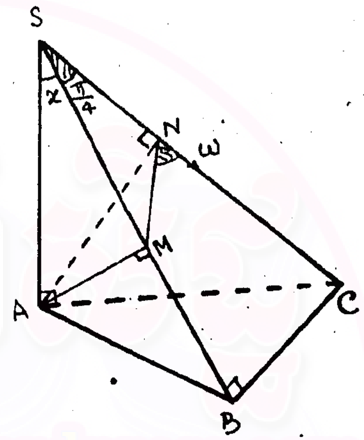
$$\boxed{(\Delta'): y=-2x}$$

ម្យ៉ាងទៀតដោយសារបន្ទាត់ (Δ') មានរាង $y=ax$ ដូចនេះវា

កាត់តាមចំនុច $O(0,0)$ ។

ដូច្នេះបន្ទាត់ $(\Delta'): y=-2x$ កាត់តាមចំនុចរបត់នៃខ្សែកោង ។

III.



1-ក). ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(BC)\perp(SB)$

តាមសម្មតិកម្មទ្រេមុខទ្រនឹង (SB) ជាទ្រេមុខកែង ដូចនេះយើងបាន:

$(SBC)\perp(SAB)$

$$\left.\begin{array}{l}(SA)\perp(ABC) \\ (SA)\subset(SAB)\end{array}\right| \Rightarrow (ABC)\perp(SAB)$$

$$\left.\begin{array}{l}(SBC)\perp(SAB) \\ (ABC)\perp(SAB) \\ (ABC)\cap(SBC)=(BC)\end{array}\right| \Rightarrow (BC)\perp(SAB)$$

$$\left.\begin{array}{l}(BC)\perp(SAB) \\ (SB)\subset(SAB)\end{array}\right| \Rightarrow (BC)\perp(SB)$$

ខ). កំនត់ផ្ចិត ω និងកាំ R នៃស្វ៊ែចារឹកក្រៅចតុមុខ $SABC$

យក ω ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[SC]$, យើងបាន:

$[A\omega]$ ជាមេដ្យានគូសពីកំពូលមុំកែង A នៃត្រីកោណកែង SAC

$\Rightarrow |A\omega|=|\omega S|=|\omega C|=\frac{1}{2}|SC|$ (1)

តាមសំរាយខាងលើ $(BC)\perp(SB) \Rightarrow \Delta SBC$ កែងត្រង់ B ។ ដោយ

$[B\omega]$ ជាមេដ្យានគូសពីកំពូលមុំកែង B នៃត្រីកោណកែង SBC

$\Rightarrow |B\omega|=\frac{1}{2}|SC|$ (2)

(ព្រោះៈមេដ្យាននៃត្រីកោណកែងដែលគូសពីកំពូលមុំកែងមានរង្វាស់ស្មើនឹងពាក់កណ្តាលអ៊ីប៉ូតេនុស)

(1) និង (2) $\Rightarrow |A\Omega| = |B\Omega| = |\Omega S| = |\Omega C| = \frac{1}{2}|SC|$ សមភាពនេះ បញ្ជាក់ថា Ω គឺជាផ្ចិតនៃស្វ៊ែរចារឹកក្រៅចតុមុខ SABC ដែលមានកាំ $R = \frac{1}{2}|SC|$ ។

ត្រីកោណកែង SBC មានមុំ $\widehat{BSC} = \frac{\pi}{4}$ ជាត្រីកោណកែងសមបាត

$\Rightarrow |BC| = |SB| = a\sqrt{2}$ ដូចនេះ $|SC| = |SB|\sqrt{2} = a\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2a$

គេបាន $R = \frac{1}{2}|SC| = \frac{1}{2}.2a = a$

ដូច្នេះកាំស្វ៊ែរចារឹកក្រៅចតុមុខ SABC គឺ $\boxed{R = a}$

2. គណនាមាឌនៃចតុមុខ SABC

តាមសំនួរ 1 ក) យើងបាន $(BC) \perp (SAB)$

$$\left.\begin{aligned}&(BC) \perp (SAB)\\&(AB) \subset (SAB)\end{aligned}\right| \Rightarrow (BC) \perp (AB)$$ ដូចនេះ ΔABC កែងត្រង់ B

មាឌនៃចតុមុខ SABC កំនត់ដោយ :

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC}\cdot|SA| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|AB||BC||SA|$$

ក្នុងត្រីកោណកែង SAB យើងមាន :

$$\sin\alpha = \frac{|AB|}{|SB|} \Rightarrow |AB| = |SB|.\sin\alpha = a\sqrt{2}\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{|SA|}{|SB|} \Rightarrow |SA| = |SB|.\cos\alpha = a\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}.(a\sqrt{2}\sin\alpha).(a\sqrt{2}).(a\sqrt{2}\cos\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3\sin 2\alpha$$

ដូច្នេះមាឌនៃចតុមុខ SABC គឺ $\boxed{V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3\sin 2\alpha}$

កំនត់ α ដើម្បីឲ្យ V អតិបរមា

V អតិបរមា កាលណា $\sin 2\alpha$ អតិបរមា

$\sin 2\alpha$ អតិបរមាបើ $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

ដូច្នេះមាឌ V អតិបរមាកាលណា $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

3. កំនត់ α ដើម្បីឲ្យមុំរិចទីលីញនៃមុំពីរមុខត្រង់ (SC) ស្មើនឹង $\pi/3$

តាមចំនុច A គូសបន្ទាត់ $(AM) \perp (SB)$ ត្រង់ M, $(AN) \perp (SC)$ ត្រង់ N ។ យើងមាន :

$$\left.\begin{aligned}&(BC) \perp (SAB)\\&(AM) \subset (SAB)\end{aligned}\right| \Rightarrow (BC) \perp (AM) \text{ ឬ } (AM) \perp (BC)$$

$$\left.\begin{aligned}&(AM) \perp (BC)\\&(AM) \perp (SB)\end{aligned}\right| \Rightarrow (AM) \perp (SBC)$$

$$\left.\begin{aligned}&(AM) \perp (SBC)\\&(SC),(MN) \subset (SBC)\end{aligned}\right| \Rightarrow (AM) \perp (SC) \text{ ឬ } (SC) \perp (AM) \text{ និង } (AM) \perp (MN)$$

$\Rightarrow \Delta AMN$ កែងត្រង់ M

$$\left.\begin{aligned}&(SC) \perp (AM)\\&(SC) \perp (AN)\end{aligned}\right| \Rightarrow (SC) \perp (AMN)$$

$$\left.\begin{aligned}&(SC) \perp (AMN)\\&(MN) \subset (AMN)\end{aligned}\right| \Rightarrow (SC) \perp (MN) \text{ ឬ } (MN) \perp (SC)$$

ដោយ $$\left.\begin{aligned}&(AN) \perp (SC)\\&(MN) \perp (SC)\end{aligned}\right| \Rightarrow \widehat{ANM} = \gamma$$ ជារិចទីលីញនៃមុំពីរមុខត្រង់ (SC)

ត្រីកោណ AMN កែងត្រង់ M គេបាន :

$$tg\gamma = \frac{|AM|}{|MN|} \qquad (3)$$

ត្រីកោណ AMS កែងត្រង់ M $\Rightarrow tg\alpha = \frac{|AM|}{|SM|} \Rightarrow |AM| = |SM|\,tg\alpha$

ត្រីកោណ SMN កែងត្រង់ N $\Rightarrow \sin\frac{\pi}{4} = \frac{|MN|}{|SM|} \Rightarrow |MN| = |SM|\sin\frac{\pi}{4}$

$|MN| = |SM|.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$(3) \Rightarrow tg\gamma = \frac{|SM|\,tg\alpha}{|SM|.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\,tg\alpha$$

$\gamma = \pi/3 \Rightarrow tg\gamma = tg\,\pi/3 = \sqrt{3}$ ដូចនេះ:

$$tg\gamma = \sqrt{2}\,tg\alpha \Leftrightarrow \sqrt{3} = \sqrt{2}\,tg\alpha$$
$$\Leftrightarrow tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = arctg\,\frac{\sqrt{6}}{2}$$

ដូច្នេះវិចទីលីញ៉ូនៃទ្រមុខស្រនុង (SC) ស្មើនឹង $\frac{\pi}{3}$ កាលណា:

$$\boxed{\alpha = arctg\,\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

អ្នកបានស្តាប់ ស្ត្រីមេម៉ាយម្នាក់ ដែលមានប្តីជាទាហានស្លាប់ក្នុងកិច្ចការពារមាតុប្រទេសបំពេរកូនឲ្យដេក ។

ចម្រៀងបំពេរនេះ: មានធ្វើឲ្យអ្នករំភើបយ៉ាងខ្លាំង ចំពោះសោភាពពិត និងសេចក្តីស្នេហាមាតុប្រទេស ។

ចូរអ្នកសាកល្បងរៀបរាប់សារឡើងវិញ នូវអាការៈរំភើបញាប់ញ័ររបស់អ្នក និងឲ្យយោបល់ ។